高等代数 II - quiz 1.

过 2025.3.24

1. (16 分) 简答题. 请直接写出下列问题的答案. (不需要给出解题过程或理由.)

(a) 如果要写出一组 6 阶幂零的 Jordan 形矩阵, 要求该组矩阵中两两不相似, 那么这组矩阵最多有 **11** 个矩阵.

J_6, $\begin{pmatrix} J_1 & \\ & J_5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_1 & \\ & & J_4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} J_2 & \\ & J_4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & J_1 & \\ & & & J_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} J_3 & \\ & J_3 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & J_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & J_2 & \\ & & & J_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} J_2 & & \\ & J_2 & \\ & & J_2 \end{pmatrix}$, 0.

(b) 写出大小相同的两个幂零矩阵 A, B 使得 $A+B$ 不是幂零阵.

$A = \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix}$

(c) 若方阵 A 的特征多项式为 $X^4 - X - 2$, 则 $-A$ 的特征多项式为 ___.

$X^4 + X - 2$

(d) 设 V 是 n 维复向量空间, $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$. 则下列论断正确的有 ___ (正确选项可能不只一个).

AD

(A) $\mathrm{Im}(\mathscr{A}^n) = \mathrm{Im}(\mathscr{A}^{n+1})$ 一定成立.

(B) 设 $\mathcal{B}$ 是 V 的一组有序基使得矩阵 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathscr{A})$ 是上三角阵, 则 $\mathscr{A}$ 可对角化当且仅当 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathscr{A})$ 是对角阵.

(C) 如果 $n > 1$ 但 $\mathscr{A}$ 只有一个特征值, 则 $\mathscr{A}$ 不能对角化.

(D) 若 $\mathscr{A}$ 是幂零变换, $W \subseteq V$ 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, 则 $\mathscr{A}|_W \in \mathrm{End}(W)$ 也是幂零变换.

(A) $\mathrm{Im}(\mathscr{A}^{n+1}) \subseteq \mathrm{Im}\,\mathscr{A}^n$ 且 $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^{n+1} = \mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^n \Rightarrow \mathrm{rank}\,\mathscr{A}^{n+1} = \mathrm{rank}\,\mathscr{A}^n$

(B) $\begin{pmatrix} & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$ 可对角上三角阵，但不是对角阵.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ 只有一个特征值，但可对角化.

D) $(\mathscr{A}|_W)^n = \mathscr{A}^n|_W$. n足够大时, $(\mathscr{A}|_W)^n = 0$.

2. (16 分) 判断正误. 正确的解释理由, 错误的请举出反例.

(a) 设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 均为向量空间 V 上的线性变换, 且 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 可交换. 则 $\mathrm{Ker}(\mathscr{B})$ 和 $\mathrm{Im}(\mathscr{B})$ 都是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

a) ✓. $\forall v \in \mathrm{Ker}\,\mathscr{B}$, $\mathscr{B}(\mathscr{A}(v)) = \mathscr{A}(\mathscr{B}(v)) = 0 \Rightarrow \mathscr{A}v \in \mathrm{Ker}\,\mathscr{B}$

$\forall u \in \mathrm{Im}\,\mathscr{B}$, $\exists u' \in V$ s.t. $u = \mathscr{B}u'$, $\mathscr{A}u = \mathscr{A}\mathscr{B}(u') = \mathscr{B}(\mathscr{A}(u')) \in \mathrm{Im}\,\mathscr{B}$.

(b) 设 f 是 n 阶方阵 A 的特征多项式. 则 A 不可逆当且仅当 $f(0) = 0$.

b) ✓ 不可逆 $\Leftrightarrow$ 存在0特征值 $\Leftrightarrow$ $f(0)=0$

(c) 设 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ 为可逆矩阵, $N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ 是幂零矩阵, 则 $A + N$ 可逆.

c) × $A = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} & -1 \\ & \end{pmatrix}$, $A+N = E_{21}$ 不可逆.

(d) 设 U 是有限维 K-向量空间 V 的子空间, $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$. 若 U 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, 则一定存在 $\mathscr{A}$ 的不变子空间 W 使得 $V = U \oplus W$.

d) × $\mathscr{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; X \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} X$, $\mathbb{R}e_1$ 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, 但不存在其直和补且同时为不变子空间 (若不然, $\mathscr{A}$ 可对角化, 矛盾)

3. (10 分) 令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) 求 A 的 Jordan 标准形 J.

(b) 请找出一个可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = J$.

a) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ & \lambda+1 & 1 \\ & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 1 + 1) = \lambda^3$

令 $\mathscr{A}: K^3 \to K^3; X \to AX$. $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A} = \mathrm{span}\{e_1, e_2 - e_3\}$.

故 $J = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$

b) 注意到 $\mathscr{A}e_2 = e_1 - e_2 + e_3 \in \mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$. 取 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & -1 & \end{pmatrix}$, 则有 $P^{-1}AP = J$.

4. (8 分) 设 V 是 n 维 K-向量空间, $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$. 假设 $\mathscr{A}$ 的不变子空间只有 0 和 V 两个.

(a) 证明: 若 $K = \mathbb{C}$, 则必有 $n = 1$.

(b) 若 $K = \mathbb{R}$, 是否一定有 $n = 1$? 若是, 请给出证明; 若否, 请给出反例.

证. a) 若 $K=\mathbb{C}$，则 $\mathscr{A}$ 必有一特征值，即 $\exists\, \xi \in V$ 非0 & $\lambda \in \mathbb{C}$ s.t. $\mathscr{A}\xi = \lambda\xi$.
此时，$\mathbb{C}\xi$ 为 $\mathscr{A}$ 的非零不变子空间. 故 $V = \mathbb{C}\xi$

b) 不一定. 令 $A = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$，$\mathscr{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ X \mapsto AX$.

(若 $\mathscr{A}$ 可约，则一定分解成特征子空间直和，而 A 的特征值均不在 $\mathbb{R}$ 中)

高代II 一 期中考试

甘 2025.4.22.

一. 1. $\mathcal{A}(1)=1$, $\mathcal{A}(X)=X$, $\mathcal{A}(X^2)=2X^2$, $\mathcal{A}(X^3)=3X^3$

记 $\varepsilon=(1,X,X^2,X^3)$ 为 V 的一组基, $M_\varepsilon(\mathcal{A})=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&2&\\&&&3\end{pmatrix}$

$\mathcal{A}$的特征值为1,2,3. 代数重数分别为2.1.1.

2. 对称矩阵空间 $S=\{M\in M_2(\mathbb{R}): M=M^T\}$. $\mathcal{A}(S)=0$

反对称矩阵空间 $T=\{M\in M_2(\mathbb{R}): M=-M^T\}$, $\mathcal{A}(T)=T$

3. $J_1=\begin{pmatrix}J_1(0)&&&\\&J_1(0)&&\\&&J_2(0)&\\&&&J_2(1)\end{pmatrix}$, $J_2=\begin{pmatrix}J_2(0)&&\\&J_2(0)&\\&&J_2(1)\end{pmatrix}$, $J_3=\begin{pmatrix}J_1(0)&&&\\&J_1(0)&&\\&&J_1(1)&\\&&&J_2(1)\end{pmatrix}$

$J_4=\begin{pmatrix}J_2(0)&&\\&J_2(1)&\\&&J_2(1)\end{pmatrix}$, $J_5=\begin{pmatrix}J_2(0)&&&\\&J_1(1)&&\\&&J_1(1)&\\&&&J_2(1)\end{pmatrix}$. $m\leq 5$

4. $D=\begin{pmatrix}1&-1\\&2\end{pmatrix}$

5. q 的 Gram 矩阵为 $G=\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1\\-\frac{1}{2}&1&2\end{pmatrix}$

$|\lambda I-G|=\begin{vmatrix}\lambda-1&&\frac{1}{2}\\&\lambda&\\\frac{1}{2}&&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)-\frac{1}{4}\lambda=\lambda(\lambda^2-3\lambda+\frac{7}{4})$

$\lambda_3=0$, $\lambda_1+\lambda_2=3$, $\lambda_1\lambda_2=\frac{7}{4}\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2>0$, $\lambda_3=0$

故正惯性指数为2.

6. $\left.\begin{array}{r}-2<0\\-4t-1>0\\t^2+4t+1<0\end{array}\right\}\Rightarrow -2-\sqrt{3}<t<-2+\sqrt{3}$ 且 $t<-\frac{1}{4}\Rightarrow t\in(-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3})$.

二. 1. T 由于 X^3-2X+1 有三个不同的实零点, 故 A 有三个不同的实特征值

所以 A 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化.

2. F $A=E_{21}$, $B=E_{12}$. 则 $\mathcal{A}$ (resp $\mathcal{B}$): $X\mapsto AX$ (resp. BX) 不满足题意

3. T 对应为 A 的特征值为1的特征向量.

4. T　φ 非退化 $\Rightarrow \hat{\varphi}': V \to V^\circ$ 可逆

考虑 $\varphi(v_0,\cdot)\in V^\circ$ 的逆象 w_0，即 $\hat{\varphi}'(w_0)=\varphi(v_0,\cdot)$

则 $\varphi(\cdot,w_0)=\varphi(v_0,\cdot)$

5. F　考虑 $A-B=\begin{pmatrix} & 1\\ -1 & \end{pmatrix}$

6. F　$A=1$，$C=-\frac{1}{2}$，　$A-c1=\frac{1}{2}$ 亦为正定.

三. 1. 考虑 $M_2(K)$ 的一组基，$A=\begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} & 1\\ & \end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}$

$\varphi(A)=0$，$\varphi(B)=2A$，$\varphi(C)=-B$，$\varphi(D)=0$.

则在这组有序基下，φ 的矩阵为 $M=\begin{pmatrix}0&2&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$M^2=\begin{pmatrix}0&0&-2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$M^3=0$

M 幂零，故 φ 幂零

2. $|\lambda I_4-M|=\lambda^4$，由于 $M^3=0$ 且最小多项式 $g(\lambda)\mid\lambda^4$，则 $g(\lambda)=\lambda^3$.

3. $\varphi^2(C)=-2A\neq 0$　取基 $\varepsilon=(D,\varphi^2(C),\varphi(C),C)$，即 $\varepsilon=(D,-2A,-B,C)$

则 $M_\varepsilon(\varphi)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

四. 1.

$B=\begin{pmatrix}1&\\&\frac{1}{2}\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&\\&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}$，则 B 显然相合于 A.

但 $|B|=\frac{1}{4}|A|\neq 0$，故不相似

2.

$C=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\&\frac{1}{2}\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&-1\\&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\&4\end{pmatrix}$，由于 $\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\&2\end{pmatrix}^{-1}$，故 C 相似于 A

法I. 若 $\exists$ 矩阵可逆阵 P s.t. $P^TCP=A$，则 $P^TC^TP=A^T=A=P^TCP$

即 $P^T\begin{pmatrix}&3\\-3&\end{pmatrix}P=0$，则 0 为三个可逆阵乘积 矛盾!

故 C 与 A 不相合.

法II. 若 C 相合 A，则 C 对称. 矛盾!

五. 1. 若A幂零，不妨设 $A^m=0$，则 $e_k(A)=\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!}A^l$，$\forall k>m$

若A可对角化，即∃可逆P s.t. $A=P^{-1}DP$，其中 $D=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$

则 $e_k(A)=P^{-1}\left(\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}D^l\right)P=P^{-1}\begin{pmatrix}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}d_1^l & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}d_2^l\end{pmatrix}P$

$$\to P^{-1}\begin{pmatrix}e^{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{d_2}\end{pmatrix}P$$

2. 若A的复特征值均为实数，则A在R上相似于Jordan矩阵。

令可逆实阵Q s.t. $A=Q^{-1}JQ=Q^{-1}(D+N)Q$ 其中J为Jordan阵

D对角，N次对角，于是N幂零，即 $N^n=0$，令 $D=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$

则 $\forall k\geq n$

$$e_k(A)=Q^{-1}\left(\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}(D+N)^l\right)Q$$

$$=Q^{-1}\left(\sum_{l=0}^{k}\frac{D^l}{l!}+\sum_{l=1}^{k}\binom{l}{1}\frac{D^{l-1}}{l!}N+\cdots+\sum_{l=n}^{k}\binom{l}{n-1}\frac{D^{l-n+1}}{l!}N^{n-1}\right)$$

考虑其中任意项 $\sum_{l=i}^{k}\binom{l}{i}\frac{D^{l-i}}{l!}N^i=\sum_{l=i}^{k}\frac{D^{l-i}}{(l-i)!}\frac{N^i}{i!}=\left(\sum_{l=0}^{k-i}\frac{D^l}{l!}\right)\frac{N^i}{i!}$

$\sum_{l=0}^{k-i}\frac{D^l}{l!}$ 收敛，$\frac{N^i}{i!}$ 为常数，故有限和式中任一项均收敛

故 $e_k(A)$ 收敛

3. $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+1\Rightarrow\lambda=1$ 为A的唯一特征值。

由2，$e_k(A)$ 收敛。

$A-I=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，$(A-I)^2=0$ ∃可逆阵 $P=\begin{pmatrix}1 & \\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 满足 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix}=J$

$$e^J=\lim_{k\to+\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{J^l}{l!}=\lim_{k\to+\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{I^l+l\begin{pmatrix} & 1\\ & \end{pmatrix}}{l!}=\lim_{k\to+\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{I^l}{l!}+\lim_{k\to+\infty}\sum_{l=1}^{k}\frac{\begin{pmatrix} & 1\\ & \end{pmatrix}}{(l-1)!}$$

$$=\begin{pmatrix}e & \\ & e\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & e\\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e & e\\ & e\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^A=Pe^JP^{-1}=\begin{pmatrix} & e\\ -e & 2e\end{pmatrix}$$

六. 1. q 奇异 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 一组基 ε 对应的 Gram 矩阵 G 不满秩.

$\Rightarrow \exists X \in K^n \setminus \{0\}$ s.t. $GX = 0$.

$\Rightarrow$ 令 $v = \varepsilon X$, $q(v) = X^T G X = 0 \Rightarrow q$ 迷向

2. "$\Leftarrow$" v_1 即为 q 的一个迷向向量

"$\Rightarrow$" 若 v 为 q 的一个迷向向量, 由于 q 非奇异, $\exists w' \in V$ s.t. $b_q(v, w') \neq 0$.

令 $w = w' - \dfrac{q(w')}{2b_q(v,w')} v$, 则 $q(w) = q(w') - 2b_q\left(\dfrac{q(w')}{2b_q(v,w')} v, w'\right) = 0$

易证 v, w 线性无关 (v, w' 线性无关), 将其扩充为 V 的一组基:

$v, w, v_1', v_2', \cdots, v_{n-2}'$

即 $\mathrm{Span}\{v,w\}$ 的正交补空间

再将 v_i' 调整为 $v_i = v_i' - \dfrac{b_q(v, v_i')}{b_q(v,w)} w - \dfrac{b_q(w, v_i')}{b_q(v,w)} v$

(注意到 $b_q(v,w) = b_q(v,w') \neq 0$)

则 $b_q(v, v_i) = b_q(w, v_i) = 0$.

故在基 $B = (v, w, v_1, \cdots, v_{n-2})$ 下, $M_B(q) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & A \end{pmatrix}$, 其中

$A = \left(b_q(v_i, v_j)\right)_{1 \le i,j \le n-2}$ 为对称阵.

七. 1. 若 φ 不可逆, 则 φ 不单, 即 $\exists x \in V \setminus \{0\}$, s.t. $\varphi(x) = 0$.

$b(x,x) = b(\varphi(x), \varphi(x)) = 0$, 与 b 非退化矛盾!

2. 确定 V 的一组基 ε, $M_\varepsilon(b) = B$. $M_\varepsilon(\varphi) = P$. 由 b, φ 非退化, B, P 可逆

则 $\forall X, Y \in K^n$, $X^T B Y = X^T P^T B P Y$, $\Rightarrow B = P^T B P$

即 $B^{-1} P^{T-1} B = P$.

若 $f(x)$ 为 P 的特征多项式, 即 $B^{-1}P^{T-1}B$ 的特征多项式, 则 $f(x)$ 也为 P^{T-1} 的特征多项式, 即 $|xI - P^{T-1}| = f(x)$

于是 $f(x) = |P^T|^{-1} \cdot |xP^T - I_n| = x^n |P^T - x^{-1} I_n| \cdot |P^T|^{-1} = x^n f(x^{-1}) \cdot f(0)^{-1}$

即 $f(x) f(0) = x^n \cdot f(x^{-1})$.

3. $|P| = |B^{-1}P^{T-1}B| = |P^{T-1}| = |P|^{-1} \Rightarrow |P| = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(0) = (-1)^n \\ f(0)f(1) = f(1) \\ f(0)f(-1) = (-1)^n f(-1) \end{array}\right\} \xRightarrow{f(1)f(-1)\neq 0} \begin{cases} f(0) = 1 \\ (-1)^n = 1 \end{cases} \Rightarrow n\text{为偶数}.$$

$\det\varphi = (-1)^n f(0) = f(0) = 1.$

高代习题课 - Quiz 2.

[illegible] 2025.5.9

1. (a) $\sqrt{14}$

   (b) BCD

2. (1) F 令 $\alpha: x \mapsto Mx + t$，$\beta: x \mapsto Bx$，其中 M 可逆，B 为矩阵

$$\alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha(x) = \alpha^{-1} \circ \beta(Mx + t) = \alpha^{-1}(BMx + Bt) = M^{-1}(BMx + Bt - t)$$

$$= M^{-1}BMx + M^{-1}Bt - t$$

(2) F $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 0$

(3) T、把规范正交基映射到规范正交基即可.

(4) T. 三角不等式

3. 令 $\begin{cases} x' = x - y + \frac{3}{2}z \\ y' = 2y + z \\ z' = y \end{cases}$

则方程为

$$2\left(x - y + \tfrac{3}{2}z\right)^2 + 2y^2 + \tfrac{1}{2}z^2 + 2yz - \left(x - y + \tfrac{3}{2}z\right) - \tfrac{1}{2}z$$

$$= 2x' + \tfrac{1}{2}(z + 2y)^2 - x' - \tfrac{1}{2}(z + 2y) + y$$

$$= 2x' + \tfrac{1}{2}y'^2 - x' - \tfrac{1}{2}y' + z' = 0$$

再令 $\begin{cases} X = x' - \frac{1}{4} \\ Y = y' - \frac{1}{2} \\ Z = z' \end{cases}$，则方程为 $2X^2 + \frac{1}{2}Y^2 + z' = \frac{1}{4}$

方程为椭圆抛物面.

4. (a) $\langle \mathscr{A}(f), \mathscr{A}(g)\rangle = \langle f(2-X), g(2-X)\rangle$

$$= f(2)g(2) + f(1)g(1) + f(0)g(0)$$

$$= \langle f, g\rangle$$

(b) $\mathscr{A}(1) = 1$

$\mathscr{A}(X) = 2-X$

$\mathscr{A}(X^2) = (2-X)^2 = 4-4X+X^2$

$$\Rightarrow M_B(\mathscr{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $\langle 1, 1\rangle = 3$

$\langle 1, X\rangle = 3$, $\langle X, X\rangle = 5$

$\langle 1, X^2\rangle = 5$ $\langle X, X^2\rangle = 9$, $\langle X^2, X^2\rangle = 17$

令 $f_1(X) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f_2(X) = \dfrac{X - \langle X, f_1(X)\rangle f_1(X)}{\sqrt{\langle X, X\rangle - \langle X, f_1(X)\rangle^2}} = \dfrac{X-1}{\sqrt{2}}$

$$\tilde{f}_3(X) = X^2 - \langle X^2, f_2(X)\rangle f_2(X) - \langle X^2, f_1(X)\rangle f_1(X)$$

$$= X^2 - 2(X-1) - \frac{5}{3}\cdot 1 = X^2 - 2X + \frac{1}{3}$$

$$f_3(X) = \frac{\tilde{f}_3(X)}{\sqrt{\langle \tilde{f}_3(X), \tilde{f}_3(X)\rangle}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(X^2 - 2X + \frac{1}{3}\right)$$

取基 $(f_1(X), f_2(X), f_3(X))$ 即可

5. "$\Rightarrow$" 若 $v_1, \cdots, v_n$ 线性无关, A 不满秩, 即 $\mathrm{Rad}\langle\cdot,\cdot\rangle \neq 0$. 任取非零向量 $v \in \mathrm{Rad}\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\langle v, v_i\rangle = 0$, $\forall i$, 又 $\exists a_i \in \mathbb{R}$ s.t. $v = \sum a_i v_i$. 故 $\langle v, v\rangle = 0$, 矛盾.

"$\Leftarrow$" 若 $\exists a_i \in \mathbb{R}$ s.t. $\sum a_i v_i = 0$, 则 $\langle v_i, \sum a_j v_j\rangle = 0$ $\forall i$, 即 $A(a_1, \cdots, a_n)^T = 0$

又 A 满秩 $\Rightarrow (a_1, \cdots, a_n)^T = 0$.

高代II习题课 - Quiz 3.

2025.5.30

1. a) A, C $\quad \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

b) $\mathcal{U} = \mathrm{span}\{X-1,\ X(X-1)\}$

若 $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ 与 $\mathcal{U}$ 正交, 即 $\begin{cases} \langle f, X-1\rangle = 4a_2 + 2a_1 = 0 \\ \langle f, X^2 - X\rangle = 2(4a_2 + 2a_1 + a_0) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f = a_2(X^2 - 2X)$, $a_2 \in \mathbb{R}$

c) $\langle X^2-2, X^2-2X\rangle = 1$, $\langle X^2-2X, X^2-2X\rangle = 1$

$P_{\mathcal{U}}(X^2-2) = X^2 - 2 - (X^2 - 2X) = 2X - 2$

2. (a) F 取 ε 标准正交基, $M_\varepsilon(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$, $M_\varepsilon(\mathcal{A}^2 + 2\mathcal{A} + 5I) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) T 由于斜对称标准型矩阵由特征多项式决定.

(c) F 取 ε 标准正交基, 则 $A = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 不对称.

3. a) $\langle x, y\rangle_M = x^T M y = y^T M^T x = y^T M x = \langle y, x\rangle_M$

$\langle x, x\rangle_M = x^T M x = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$

当且仅当 $x_1 = x_2 = 0$ 时, 取 "="

b) $\langle Ax, y\rangle = x^T A^T M y = x^T M M^{-1} A^T M y$

由伴随的唯一性 $\mathcal{A}^*: X \to M^{-1}A^T M X = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X$

4. 由正交变换的谱定理知: $\exists$ 一组标准正交基 $\varepsilon = (e_1, \cdots, e_5)$ s.t. e_i 为特征向量

且正交变换的实特征值只能为 ±1，故 $\mathscr{A}^2 e_1 = (\pm1)^2 e_1 = e_1$

5.

$$\langle \mathscr{A}v, w\rangle = \langle v, x\rangle\langle y, w\rangle = \langle v, \langle y,w\rangle x\rangle$$

由伴随的唯一性，$\mathscr{A}^*: w \mapsto \langle y, w\rangle x$

i) ⇒ ii) ✓

ii) ⇒ iii)

$$(\mathscr{A}\mathscr{A}^* - \mathscr{A}^*\mathscr{A})v = \langle y, v\rangle \mathscr{A}(x) - \langle v, x\rangle \mathscr{A}^*(y)$$

$$= \langle y, v\rangle\langle x, x\rangle y - \langle v, x\rangle\langle y, y\rangle x$$

$$= 0$$

若 x 或 $y=0$，则结果显然.

若 $x,y\neq0$，取 $v=y$，则 $y = \dfrac{\langle v, x\rangle}{\langle x, x\rangle} x$

⇒ x, y 线性相关，

iii) ⇒ i) 不妨令 $x = ky$，$k\in\mathbb{R}$，$\mathscr{A}^*(w) = \langle y, w\rangle x = \langle w, x\rangle y = \mathscr{A}(w)$