南方科技大学 SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

**考试科目:** 高 等 代 数 I　　　　**开课单位:** 数 学 系

**考试时长:** 120 分钟　　　　**命题教师:** 胡 勇

| 题 号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 分 值 | 32 分 | 18 分 | 8 分 | 10 分 | 18 分 | 8 分 | 5 分 | 1 分 |

本试卷共 ( 8 ) 大题, 满分 ( 100 ) 分.

考生答卷应使用中文.

答卷要求书写规范, 字迹清晰易辨认. 解题过程要求语句完整、逻辑通顺, 数学符号和术语使用规范.

---

以下总设 $K$ 为 $\mathbb{C}$ 的子域, $m, n, r, s$ 表示正整数. 数学记号与课程讲义相同, 有疑问可以询问监考老师.

## 第一部分 (共 50 分)

对于这一部分的每一个问题, 考生只需直接写出每道题的答案, 而不必做任何解释.

**第 1 大题** (本题共 32 分) 请直接写出以下问题的答案. (不需要做进一步解释.)

1. 写出一个满射 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

2. 令 $X = \{0, -1, 1\}$, $Y = \{0, -1, -2\}$. 定义映射 $f : X \to Y$ 为 $f(x) = x^3 - x$. 能使图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

交换的映射 $g$ 共有 ____ 个. (如果没有这样的 $g$, 可以写 0 个.)

3. 假设 $\mathbb{C}$ 的子域 $K$ 中存在一个元素 $\alpha \in K$ 满足 $\alpha^2 - \alpha + 4 = 0$. 则下列方程在 $K$ 中一定有解的是 ____. (正确选项不一定只有一个.)

   (A) $x^2 + x + 4 = 0$.

   (B) $x^2 - 2x - 3 = 0$.

   (C) $x^2 - 2\alpha x + \alpha - 5 = 0$.

   (D) $x^3 - x^2 + 4\alpha = 0$.

4. 写出一个矩阵 $X$ 满足 $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. 若 $(a, 6, 2)$ 属于 $A$ 的行空间, 则 $a =$_____.

6. 请写出 $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ 中所有行最简形的初等矩阵.

7. 假设 $A$ 是一个 10 阶方阵, 它满足 $A^4 - 2A^2 = 4I_{10} + 5A$. 请写出一个次数不超过 4 次的多项式 $g$ 使得 $A^{-1} = g(A)$.

8. 设 $\alpha_1 = (2, 3, 1, 1)$, $\alpha_2 = (4, 6, 2, 2)$, $\alpha_3 = (0, 1, 2, 1)$, $\alpha_4 = (2, 4, 3, 1)$. 请写出向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 中的两个不同的极大线性无关组.

**第 2 大题** (本题共 18 分) 对下面每个论断, 说明其正确与否, 正确的可标记为 T, 错误的可标记为 F. (不需要解释理由.)

1. 对于任意一个映射 $f : X \to Y$ 以及 $X$ 的一个子集 $A$, 如果 $A$ 是无限集, 则 $f^{-1}(f(A))$ 一定也是无限集.

2. 设 $A, B$ 是集合 $X$ 的非空子集, $C, D$ 是集合 $Y$ 的非空子集. 则 $(A \times C) \cup (B \times D) = (A \cup B) \times (C \cup D)$.

3. 设 $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $b \in K^{n\times 1}$, $V$ 是 $K^{n\times 1}$ 的子空间. 如果线性方程组 $AX = b$ 有解, 并且其解集包含在 $V$ 中, 则 $b \in V$.

4. 设 $\alpha \in K^{4\times 1}, \beta \in K^{1\times 4}$, $A = \alpha\beta$. 则存在常数 $c \in K$ 使得 $A^5 = cA$.

5. 设 $A_1 \in \mathbf{M}_{m\times n}(K)$, $A_2 \in \mathbf{M}_{r\times s}(K)$, $C \in \mathbf{M}_{m\times s}(K)$, $b_1 \in K^{m\times 1}$, $b_2 \in K^{r\times 1}$. 令 $A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, $b = \binom{b_1}{b_2}$. 假设 $A_1X = b_1$ 和 $A_2X = b_2$ 都有解. 则 $AX = b$ 也一定有解.

6. 假设 $K^n$ 中的三个向量 $v_1, v_2, v_3$ 中的任意两个线性无关, 则向量组 $v_1, v_2, v_3$ 也线性无关.

---

## 第二部分 (共 50 分)

对于下面的每一个问题, 考生需要尽可能详尽地写出答题细节, 以使每道题的解答清晰完整.

**第 3 大题** (本题共 8 分) 设 $a \in \mathbb{R}$, $L_1, L_2, L_3$ 是平面内具有如下方程的直线:

$$L_1 : ax - y + 2 = 0\,; \quad L_2 : x - 2y - a = 0\,; \quad L_3 : 2x + ay - 1 = 0.$$

假设 $L_1, L_2, L_3$ 是两两不同的直线, 且交集 $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ 恰含一个点. 求 $a$ 的所有可能取值.

**第 4 大题** (本题共 10 分) 假设 $V$ 是 $K^n$ 的非空子集, 且对于任意 $u, v \in V$ 和任意 $\lambda \in K$, 均有 $u + \lambda v \in V$.

1. 证明 $V$ 是 $K^n$ 的子空间.

2. 假设 $\dim V = n - 1$, $\alpha \in K^n \setminus V$. 请问 $K^n = V \cup \mathrm{span}(\alpha)$ 是否一定成立, 为什么？

**第 5 大题** (本题共 18 分) 考虑二阶方阵 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. 对任意 $G \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, 证明: $G$ 满足 $G^T JG = J$ 当且仅当其行列式 $\det(G)$ 等于 1.

2. 对任意 $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, 证明以下陈述等价:

   (i) $A$ 与 $J$ 可交换, 即, $AJ = JA$.

   (ii) 存在 $a, b \in \mathbb{R}$ 使得 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

   (iii) 存在实系数多项式 $f$ 使得 $A = f(J)$.

3. 设 $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 为模为 1 的复数构成的集合,

$$U := \{G \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, G \text{ 与 } J \text{ 可交换, 且 } G^T JG = J\}.$$

   证明 $S$ 与 $U$ 之间存在一个双射.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$. 计算 $A^{2024}$.

**第 6 大题** (本题共 8 分) 设 $A \in \mathbf{M}_n(K), B \in \mathbf{M}_{n\times s}(K)$. 证明以下两个条件等价:

(i) 对于任意 $x \in \mathscr{C}(B)$ 均有 $Ax \in \mathscr{C}(B)$.
(这里 $\mathscr{C}(B)$ 表示矩阵 $B$ 的列空间, 它是 $K^{n\times 1}$ 的子空间.)

(ii) 存在矩阵 $C \in \mathbf{M}_s(K)$ 使得 $AB = BC$.

**第 7 大题** (本题共 5 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是 $\mathbb{R}^{m\times 1}$ 中的一组线性无关的列向量, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是 $\mathbb{R}^{n\times 1}$ 中的一组线性无关的列向量.

证明: 若有系数 $c_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \le i \le r, 1 \le j \le s$, 使得

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} c_{ij}\alpha_i\beta_j^T = 0,$$

则每个系数 $c_{ij}$ 都必须为零.

**第 8 大题** (本题共 1 分) 请写出一个闭区间 $[a, b]$ 使得 $|a - b| \le 10$ 并且你在本试卷前面 7 个大题的总得分落在该区间内.