2024 年秋季学期高代 1 期中考试参考答案

第 1 大题 (本题共 32 分, 每小题 4 分.)

1. $f: z = x + y\mathrm{i} \mapsto x$. (答案不唯一.)
2. 27.
3. ABCD.
4. $X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
5. $a = -2$.
6. 仅有 I_3 这一个.
7. $g(X) = \frac{1}{4}(X^3 - 2X - 5) + c(4X^4 + 5X^3 + 2X - 1)$, 其中 c 可以是任意常数. (能写出一个正确的 g 即可得分.)
8. 从以下 4 种可能中任选 2 个即可: (1) α_1, α_3; (2) α_1, α_4; (3) α_2, α_3; (4) α_2, α_4.

第 2 大题 (本题共 18 分, 每小题 3 分.)

1. T. 因为 $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
2. F. 例如 $X = Y = \mathbb{R}$, $A = C = [0,1]$, $B = D = [1,2]$.
3. F. 例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$, $b = \binom{1}{1}$, $V = \mathrm{span}((1,-1)^T)$.
4. T. 因为 $A^{n+1} = \alpha(\beta\alpha)^n\beta = (\beta\alpha)^n A$.
5. F. 例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = A_2 = I_2$, $b_1 = \binom{1}{1}$, $b_2 = \binom{1}{0}$.
6. F. 例如 $n = 2$, $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$ 而 $v_3 = e_1 + e_2$.

第 3 大题 (本题共 8 分) 三条直线仅相交于一点, 这意味着方程组 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ 有且仅有一个解. (**至此可得 2 分.**)

将增广矩阵做初等行变换可得

$$\begin{pmatrix} a & -1 & -2 \\ 1 & -2 & a \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 9 & a^2 - 4a + 4 \\ 0 & a+4 & 1-2a \end{pmatrix}.$$

(**至此可再得 2 分.**)

问题中的方程组有唯一解当且仅当 $(a+4)(a^2-4a+4)=9(1-2a)$. (**至此可再得 2 分.**)

化简整理即知, 最终的等价条件是 $a^3+6a+7=0$, 亦即, $(a+1)(a^2-a+7)=0$. 所以 $a=-1$. (**至此可再得 2 分.**)

第 4 大题 (本题共 10 分)

1. (本小题 6 分) 在题设条件中取 $\lambda=1$ 可知 V 关于加法封闭. (**至此可得 2 分.**)

   因为 V 非空, 可以取定一个 $v_0\in V$. 在题设条件中取 $u=v=v_0$ 及 $\lambda=-1$ 可知 $0\in V$. (**至此可再得 2 分.**)

   最后, 在题设条件中取 $u=0$ 可知 V 关于数乘封闭. 综上即知 V 是一个子空间. (**至此可再得 2 分.**)

2. (本小题 4 分) 否. (**至此可得 1 分.**)

   事实上, 当 $n>1$ 时 $K^n=V\cup\mathrm{span}(\alpha)$ 一定不成立. 原因是: 当 $n>1$ 时, V 中可以任取一个非零向量 u. 因为 $\alpha\notin V$, 所以 u 不可能是 α 的常数倍. 由此可以验证 $\alpha+u\notin V\cup\mathrm{span}(\alpha)$. (**至此可再得 3 分.**)

第 5 大题 (本题共 18 分)

1. (本小题 3 分) 计算验证即可.

2. (本小题 6 分) (i)⇒(ii). 设 $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. 计算验证可知 $AJ=JA$ 的充分必要条件是 $d=a$, $c=-b$.

   (ii)⇒(iii). 若 $A=\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$, 则 $A=aI_2+bJ$. 也就是说 $A=f(J)$ 对于多项式 $f(X)=a+bX$ 成立.

   (iii)⇒(i). 对于任意多项式 f, J 和 $f(J)$ 一定是交换的.

3. (本小题 4 分) 根据前两个小题的结果可知

   $$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\in\mathbf{M}_2(\mathbb{R})\,\middle|\,a^2+b^2=1\right\}.$$

   (**至此可得 2 分.**)因此, 映射

   $$\psi: S\longrightarrow U;\quad z=x+y\mathrm{i}\longmapsto\begin{pmatrix} x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$$

   是一个双射. (**至此可再得 2 分.**)

4. (本小题 5 分) 注意到 $J^2=-I_2$, $A=aI_2+bJ$. 所以

   $$A^{2024}=(aI_2+bJ)^{2024}=\sum_{i=0}^{2024}\binom{2024}{i}(aI_2)^{2024-i}(bJ)^i=\sum_{i=0}^{2024}\binom{2024}{i}a^{2024-i}b^iJ^i.$$

(**至此可得 2 分.**) 对 0 和 2024 之间的整数 i 区分奇偶性来分别计算 J^i 可知

$$J^i = \begin{cases} (-1)^k I_2 & \text{若 } i = 2k\,, \\ (-1)^k J & \text{若 } i = 2k+1\,. \end{cases}$$

(**至此可再得 1 分.**) 所以

$$\begin{aligned} A^{2024} &= \sum_{i=0}^{2024} \binom{2024}{i} a^{2024-i} b^i J^i \\ &= \sum_{k=0}^{1012} (-1)^k \binom{2024}{2k} a^{2024-2k} b^{2k} I_2 + \sum_{k=0}^{1011} (-1)^k \binom{2024}{2k+1} a^{2023-2k} b^{2k+1} J \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中

$$\alpha = \sum_{k=0}^{1012} (-1)^k \binom{2024}{2k} a^{2024-2k} b^{2k},\ \beta = \sum_{k=0}^{1011} (-1)^k \binom{2024}{2k+1} a^{2023-2k} b^{2k+1}.$$

(**至此可再得 2 分.**)

第 6 大题 (本题共 8 分) 记 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 为 B 的列向量组.

(i)⇒(ii). 根据假设, 每个 $A\beta_j$ 可以写成 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 的线性组合. 故存在常数 $c_{ij} \in K$, $1 \leq i, j \leq s$ 使得

$$\text{对于每个 } j \in [\![1, s]\!],\ A\beta_j = c_{1j}\beta_1 + \cdots + c_{sj}\beta_s = (\beta_1, \cdots, \beta_s) \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{sj} \end{pmatrix}.$$

综合起来写成 (分块) 矩阵的形式即为

$$(*) \qquad\qquad A(\beta_1, \cdots, \beta_s) = (\beta_1, \cdots, \beta_s)(c_{ij}).$$

这就是说, 若取 $C = (c_{ij})$ 则 $AB = BC$ 成立.

(ii)⇒(i). 按照上面 $(*)$ 式的分块矩阵方式理解等式 $AB = BC$ 可知, 对于每个 $1 \leq j \leq s$, $A\beta_j$ 都是 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 的线性组合. 此即 $A\beta_j \in \mathscr{C}(B)$ 对每个 j 成立. 因此 $\mathrm{span}(A\beta_1, \cdots, A\beta_s) \subseteq \mathscr{C}(B)$. 对于任意 $x \in \mathscr{C}(B)$, x 是 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 的线性组合, 因而 Ax 是 $A\beta_1, \cdots, A\beta_s$ 线性组合, 故 $Ax \in \mathrm{span}(A\beta_1, \cdots, A\beta_s) \subseteq \mathscr{C}(B)$.

(本题论证过程足够清晰, 表述准确, 不得出现太大的思路跳跃. 否则酌情扣分.)

第 7 大题 (本题共 5 分) 令 $B_i = \sum_{j=1}^{s} c_{ij}\beta_j$. 则题设条件表明 $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i B_i^T = 0$. 令 $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ 为以 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 为列向量组的 $m \times r$ 矩阵, $B = (B_1, \cdots, B_r)^T$ 为以 $B_1^T, \cdots, B_r^T$ 为行向量组的 $r \times n$ 矩阵. 则

$$AB = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r) \begin{pmatrix} B_1^T \\ \vdots \\ B_r^T \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i B_i^T = 0.$$

于是 AB 的每一列为 0.

对于每个 $j \in [\![1,s]\!]$, 乘积矩阵 AB 的第 j 列是 A 的列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 的一个线性组合, 其中的组合系数就是 B 的第 j 列元素. 由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 故 B 的第 j 列元素必须全为 0. 由于这对每个 $j \in [\![1,s]\!]$ 成立, 故可知 $B=0$. 因此, 对于每个 i 均有 $\sum_{j=1}^{s} c_{ij}\beta_j = B_i = 0$. 再根据 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的线性无关性即可得到 c_{ij} 均为 0.

证法二: 事实上, 若令 $C=(c_{ij}) \in \mathbf{M}_s(K)$, $A=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$, $B=(\beta_1,\cdots,\beta_s)^T$, 则以分块矩阵的角度可以看到

$$ACB = (\alpha_1,\cdots,\alpha_r)(c_{ij})\begin{pmatrix}\beta_1^T\\ \vdots \\ \beta_s^T\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\alpha_i c_{ij}\beta_j^T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} c_{ij}\alpha_i\beta_j^T = 0.$$

由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关可知 A 列满秩, 由此可以推出 A 有左逆. 由 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关可知 B 行满秩, 由此可以推出 B 有右逆. 所以, 通过左乘 A 的一个左逆、右乘 B 的一个右逆可以 由 $ACB=0$ 推出 $C=0$, 亦即, 每个 $c_{ij}=0$.

第 8 大题 (本题共 1 分) 根据实际情况给分.