高等代数 II 习题课

HW1 廿 2025.2.21

习题 3.3.27. 设 $\mathscr{A}$ 是向量空间 U 上的线性变换, $M, N \subseteq U$ 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. 证明: $M \cap N$ 和 $M+N$ 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

$\forall v \in M \cap N$, $v \in M$ 且 $v \in N$ $\Rightarrow$ $\mathscr{A}v \in M$ 且 $\mathscr{A}v \in N$ $\Rightarrow$ $\mathscr{A}v \in M \cap N$.

$\forall v \in M+N$, $\exists m \in M, n \in N$ s.t. $v = m+n$.

$\Rightarrow \mathscr{A}v = \mathscr{A}m + \mathscr{A}n \in M+N$.

习题 3.3.29. 对任意 $a \in K$, 定义 K^2 上的线性变换

$$T_a : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ay \\ (1-a)x \end{pmatrix}.$$

证明: 如果 K^2 的某个子空间 M 是每一个 T_a 的不变子空间, 则 $M = 0$ 或 $M = K^2$.

若 $M \neq 0$, 不妨设 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in M$, 其中 $x_0 \neq 0$.

由 M 是 T_0 不变子空间, $T_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix} \in M$. 故 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M$.

由 M 是 T_1 不变子空间, $T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in M$. 故 $M = K^2$.

习题 3.3.30. 设 V 是非零的有限维 K-向量空间, $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathrm{End}(V)$ 可交换. 证明: 如果 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 都可以对角化, 那么一定存在 V 的一组有序基 $\mathcal{E}$ 使得 $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$ 和 $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\mathscr{B})$ 同时为对角阵.

由 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 可对角化, 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 为 $\mathscr{A}$ 的特征值. $V_i = E(\lambda_i, \mathscr{A})$.

于是 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$.

$\forall v \in V_i$, $\mathscr{A}\mathscr{B}v = \mathscr{B}\mathscr{A}v = \lambda_i \mathscr{B}v \Rightarrow \mathscr{B}v \in V_i$

$\Rightarrow \forall i \in [1, r]$, V_i 为 $\mathscr{B}$ 的不变子空间. 故 $\mathscr{B}$ 在 V_i 上可对角.

故取 $\mathscr{B}$ 的特征向量 $\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2, \cdots, \varepsilon_i^{k_i}$ 为 V_i 的一组基.

则 $\varepsilon_1^1, \cdots, \varepsilon_1^{k_1}, \cdots, \varepsilon_r^1, \cdots, \varepsilon_r^{k_r}$ 为 V 的一组基, 记为 $\mathcal{E}$

在这组有序基下, $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$ 与 $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\mathscr{B})$ 为对角阵

习题 3.3.34. 设 $\mathscr{A}$ 是有限维向量空间 V 上的线性变换. 证明: $\mathscr{A}$ 可上三角化当且仅当存在 V 的一组有序基 $\mathcal{B}$ 使得矩阵 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathscr{A})$ 是下三角阵.

$\mathscr{A}$ 可上三角 $\Leftrightarrow$ 存在有序基 $\mathcal{E}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 使得 $M_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$ 是上三角

$\Leftrightarrow$ 有序基 $\mathcal{E}^T=(\varepsilon_n,\varepsilon_{n-1},\cdots,\varepsilon_1)$, $M_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$ 为下三角.

习题 5.0.3. 设 $U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\mid x-3y=2t,\ y=z-t\}$.

1. 求 U 作为实向量空间的一组基.
2. 找出 $\mathbb{R}^4$ 的一个子空间 W 使 $\mathbb{R}^4=U\oplus W$.

1) 方程 $\begin{cases} x-3y-2t=0 \\ y-z+t=0 \end{cases}$ 的一个基础解系为 $(3,1,1,0)$, $(-1,-1,0,1)$

故其为解空间 U 的一组基.

2) $W=\mathrm{span}((1,0,0,0),(0,1,0,0))$ 为 U 在 $\mathbb{R}^4$ 中的直和补.

习题 5.0.13. 对于一个复矩阵 $A=(a_{ij})\in\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, 以 $\overline{A}^T=(\overline{a}_{ji})\in\mathbf{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ 表示它的**共轭转置**. 即, $\overline{A}^T$ 的第 (i,j) 位元素是 a_{ji} 的复共轭, 其中 a_{ji} 是 A 的第 (j,i) 位元素 (参见定义 8.1.3).

1. 按照通常的矩阵加法和数乘, 集合 $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ 作为 $\mathbb{C}$ 上向量空间的维数 $\dim_{\mathbb{C}}\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ 是多少? 若将 $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ 视为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 其维数 $\dim_{\mathbb{R}}\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ 是多少?

   如果一个方阵 $A\in\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ 满足 $A=\overline{A}^T$, 则称 A 是一个 Hermite **矩阵** (参见定义 8.1.3). 令 H 表示 $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ 中所有 Hermite 矩阵构成的子集.

2. 若将 $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ 视为复向量空间, H 是否是其子空间? 若是, $\dim_{\mathbb{C}}H$ 是多少? 若否, 原因是什么?
3. 若将 $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ 视为实向量空间, H 是否是其子空间? 若是, $\dim_{\mathbb{R}}H$ 是多少? 若否, 原因是什么?

1) $\dim_{\mathbb{C}} M_{m\times n}(\mathbb{C})=mn$.

$M_{m\times n}(\mathbb{C})$ 的一组基为 E_{pq}, $p\in[\![1,m]\!]$, $q\in[\![1,n]\!]$.

$\dim_{\mathbb{R}} M_{m\times n}(\mathbb{C})=2mn$

$M_{m\times n}(\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一组基为 E_{pq}, iE_{pq}, $p\in[\![1,m]\!]$, $q\in[\![1,n]\!]$.

2) 不是. 若 $A\in H$, 且 $A\neq 0$, 则 $\overline{iA}^T=-i\,\overline{A}^T=-iA\neq iA$.

故不满足保数乘

3) 是 $\forall A,B\in H$, $\overline{A+B}^T=(\overline{A}+\overline{B})^T=\overline{A}^T+\overline{B}^T=A+B$

$\forall \lambda\in\mathbb{R}$, $A\in H$, $\overline{\lambda A}^T=\overline{\lambda}\,\overline{A}^T=\lambda A$

且 $\overline{0}^T=0$, $\dim_{\mathbb{R}}H=n^2$

习题 5.0.15. 设 $V=K[X]_{\le 4}$, $U=\{f\in V\mid f(0)=f(1)=f(-1)\}$.

1. 找出 U 的一组基.
2. 将前一小题找到的 U 的基扩充为 V 的一组基.

1) $x(x-1)(x+1)$, $x^2(x-1)(x+1)$, 1

显然它们线性无关且在 U 中.

设 $U_0=\{f\in K[X]_{\le 4}: f(0)=f(1)=f(-1)=0\}$

注意到 $f\in U \Leftrightarrow f-f(0)\in U_0$.

且 U_0 同构于二维的解空间,

故 $\dim_K U=3$. 因此, 上述向量组是一组基

2) 1, $x(x-1)(x+1)$, $x^2(x-1)(x+1)$, x, x^2 为 V 的一组基

习题 5.0.16. 设 $n\ge 1$, $V=K[X]_{\le n}$.

1. 设 $f_0,f_1,\cdots,f_n$ 为 V 中向量组, 且对每个 $i\in[\![0,n]\!]$ 均有 $f_i(2)=0$. 证明: $f_0,\cdots,f_n$ 是 V 中的线性相关组.
2. 设 $g_0,g_1,\cdots,g_n$ 为 V 中向量组, 且对每个 $i\in[\![0,n]\!]$ 均有 $g_i'(2)=0$. 试问: $g_0,\cdots,g_n$ 是否有可能是 V 中的线性无关组?

1) 令 $W=\{f\in V: f(2)=0\}$, 则 W 同构于一个 n 维的解空间

故任意 $n+1$ 个 V 中的向量线性相关.

2) 令 $U=\{f\in V: f(2)=0\}$, U是V的一个真子空间.

故任意 $n+1$个 V中的向量线性相关.

习题 5.0.24. 设 $\mathscr{A}$ 为向量空间 V 上的线性变换.

1. 假设存在非零向量 $v, w \in V$ 满足 $\mathscr{A}v = 3w$, $\mathscr{A}w = 3v$. 证明: 3 或 -3 是 $\mathscr{A}$ 的特征值.
2. 证明: 如果 V 中的非零向量都是 $\mathscr{A}$ 的特征向量, 那么 $\mathscr{A}$ 一定是恒等变换 I 的常数倍.
3. 假设 V 是有限维的, $n = \dim V \geq 1$. 证明: 如果 V 的每个 $n-1$ 维子空间都是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, 那么 $\mathscr{A}$ 一定是恒等变换 I 的常数倍.

1) $\mathscr{A}(v+w) = 3w+3v = 3(v+w)$

$\mathscr{A}(v-w) = 3w-3v = -3(v-w)$

由于v,w非零, $v+w$和$v-w$不同时为零.

故 3或-3为$\mathscr{A}$的特征值.

2). $\mathscr{A}$只有一个特征值: 若有两个特征值λ_1, λ_2, 分别有特征向量ξ_1, ξ_2.

则 $\mathscr{A}(\xi_1+\xi_2) = \lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2$. 由$\xi_1+\xi_2$是一个特征向量, $\lambda_1=\lambda_2$.

设V中非零向量的特征值全为λ. 则 $\mathscr{A}=\lambda I$.

3) 断言: 对于 $\forall v\in V$, v为$\mathscr{A}$的特征向量.

若 $\exists v\in V$ s.t. $\mathscr{A}(v)\notin \mathrm{span}(v)$, 则

存在$\mathrm{span}(\mathscr{A}(v))$的直和补 $W(v)$ 使得 $v\in W(v)$

由于 $W(v)$为 $n-1$维, $W(v)$是$\mathscr{A}$不变的. 这与$\mathscr{A}(v)\notin W(v)$矛盾!

故由(2), $\mathscr{A}$是I的常数倍.

习题 5.0.27. 令 $V = K[X]_{\leq 4}$. 考虑 V 的有序基 $\mathcal{B} = (1,\, X-1,\, (X-1)^2,\, (X-1)^3,\, (X-1)^4)$.

1. 设 $\alpha = X^2 - 2 \in V$. 求 α 在有序基 $\mathcal{B}$ 下的坐标.

2. 定义线性变换
$$\mathscr{A} : V \longrightarrow V; \quad f(X) \mapsto Xf'(X),$$
其中 $f'(X)$ 表示多项式 $f(X)$ 的形式导数. 求 $\mathscr{A}$ 在有序基 $\mathcal{B}$ 下的矩阵.

3. 求上个小题中线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征多项式.

4. 令
$$U = \{f \in V \mid f(-X) = f(X)\},\ W = \{f \in V \mid f(-X) = -f(X)\}.$$
分别求 U 和 W 的一组基, 并证明 $V = U \oplus W$.

5. 证明: (4) 中的子空间 U 和 W 都是 (2) 中线性变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

6. 设 $\mathscr{A}$ 如问题 (2), U 和 W 如问题 (4). 求出 $\mathscr{A}|_U$ 和 $\mathscr{A}|_W$ 的特征多项式.

1) $\alpha(1) = -1$. $\alpha'(1) = 2X\big|_{X=1} = 2$. $\alpha''(1) = 2$. $\alpha'''(1) = \alpha^{(4)}(1) = 0$.

故坐标为 $(-1, 2, 1, 0, 0)^T$

2) $A(1) = 0$, $A(X-1) = X = X-1+1$, $A((X-1)^2) = 2X(X-1) = 2(X-1)^2 + 2(X-1)$

$A((X-1)^3) = 3X(X-1)^2 = 3(X-1)^3 + 3(X-1)^2$,

$A((X-1)^4) = 4X(X-1)^3 = 4(X-1)^4 + 4(X-1)^3$,

$$\Rightarrow M_B(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 2 & & \\ 0 & & 2 & 3 & \\ 0 & & & 3 & 4 \\ 0 & & & & 4 \end{pmatrix}$$

3) $|\lambda I - M_B(A)| = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)$

4) $1, X^2, X^4$ 为 U 的基, X, X^3 为 W 的基.

$\dim U + \dim W = \dim V = 5$ 且易证 $U \cap W = 0 \Rightarrow V = W \oplus U$.

5) $A(1) = 0 \in U$, $A(X^2) = 2X^2 \in U$, $A(X^4) = 4X^4 \in U$. $\Rightarrow U$ 是 A 不变的

$A(X) = X \in W$, $A(X^3) = 3X^3 \in W$. $\Rightarrow W$ 是 A 不变

6) $A|_U = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$, $f_U = \lambda(\lambda-2)(\lambda-4)$; $A|_W = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$, $f_W = (\lambda-1)(\lambda-3)$

高代II习题课

- HW2 甘 2025.3.4

思考题 5.3. 设 $\mathscr{A}$ 为 K-向量空间 V 上的线性变换, U 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, $\mathscr{A}' := \mathscr{A}|_U \in \mathrm{End}(U)$ 为 $\mathscr{A}$ 在 U 上的限制.

证明:

1. 对于任意多项式 $f \in K[X]$, $f(\mathscr{A})|_U = f(\mathscr{A}')$ 且 $\mathrm{Ker}(f(\mathscr{A})) \cap U = \mathrm{Ker}(f(\mathscr{A}'))$.
2. 对任意 $\lambda \in K$, $E(\lambda, \mathscr{A}) \cap U = E(\lambda, \mathscr{A}')$.
3. 假设 W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间且 $V = U \oplus W$. 再假设 V 是有限维的. 设 $f, g, h \in K[X]$ 分别为 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$, $\mathscr{A}' = \mathscr{A}|_U \in \mathrm{End}(U)$ 和 $\mathscr{A}'' := \mathscr{A}|_W \in \mathrm{End}(W)$ 的特征多项式.

   则 $f(X) = g(X)h(X)$. ■

证:

1. $\forall u \in U$, 令 $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, 其中 $a_i \in K$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$.

$f(\mathscr{A}')(u) = \sum a_i \mathscr{A}'^{i}(u) = \sum a_i \mathscr{A}^i(u) \in U$

$\Rightarrow f(\mathscr{A}') = f(A)|_U$

$\forall v \in \mathrm{Ker} f(\mathscr{A}) \cap U$, $f(\mathscr{A})v = 0$ 且 $v \in U \Rightarrow f(\mathscr{A}')v = f(\mathscr{A})|_U v = 0$

$\forall v \in \mathrm{Ker} f(\mathscr{A}')$, 由 $f(\mathscr{A}'): U \to U$, $v \in U$, $f(\mathscr{A})v = f(\mathscr{A})|_U v = f(\mathscr{A}')v = 0$

2. $E(\lambda, \mathscr{A}) = \mathrm{Ker}(\lambda I - \mathscr{A})$, $E(\lambda, \mathscr{A}') = \mathrm{Ker}(\lambda I - \mathscr{A}') = \mathrm{Ker}(\lambda I - \mathscr{A})|_U$

应用1即可.

3. 取 U 中一组基 $v_1, \cdots, v_r$, $r = \dim U$, W 中组基 $v_{r+1}, \cdots, v_n$, $n - r = \dim W$.

则 $\mathscr{A}$ 在基 $v_1, \cdots, v_n$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} B & \\ & C \end{pmatrix}$, 故

$$P_{\mathscr{A}}(X) = |X 1_n - A| = \begin{vmatrix} X 1_r - B & \\ & X 1_{n-r} - C \end{vmatrix} = |X 1_r - B| \cdot |X 1_{n-r} - C| = P_{\mathscr{A}|_U}(X) P_{\mathscr{A}|_W}(X)$$

思考题 5.6. 设 $A \in \mathbf{M}_m(K)$. 假设存在 $\lambda \in K$ 使得 $A - \lambda I_m$ 是严格上三角阵但 $A \neq \lambda I_m$.

证明: A 不可以对角化.

证明: 反设 A 可对角化, 则 $\exists$ 可逆阵 P s.t. $A = PDP^{-1}$, 其中 D 为对角阵.

$A - \lambda I_m$ 严格上三角 $\Rightarrow$ $A - \lambda I_m$ 幂零.

假设 $(A - \lambda I_m)^r = 0$, 则 $[P(D - \lambda I_m)P^{-1}]^r = P(D - \lambda I_m)^r P^{-1} = 0$, 即 $(D - \lambda I_m)^r = 0$.

由于 $D-\lambda I_m$ 为对角阵，$D-\lambda I_m=0$. 即 $A-\lambda I_m=0$. 矛盾.

思考题 5.8. 假设 J 是 6 阶的 Jordan 形幂零矩阵, 其中 Jordan 块的大小按从左上方至右下方的排序是逐渐增大 (不一定严格增大) 的. 请问: J 一共有几种可能的形式？它们分别是什么样子？它们各自的幂零阶是多少？ ■

1阶：$\begin{pmatrix}0&&\\&\ddots&\\&&0\end{pmatrix}$

2阶：$\begin{pmatrix}0&&&&&\\&0&&&&\\&&0&&&\\&&&0&&\\&&&&0&1\\&&&&&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&&&&&\\&0&&&&\\&&0&1&&\\&&&0&&\\&&&&0&1\\&&&&&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1&&&&\\&0&&&&\\&&0&1&&\\&&&0&&\\&&&&0&1\\&&&&&0\end{pmatrix}$

3阶：$\begin{pmatrix}0&&&&&\\&0&&&&\\&&0&&&\\&&&0&1&\\&&&&0&1\\&&&&&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&&&&&\\&0&1&&&\\&&0&&&\\&&&0&1&\\&&&&0&1\\&&&&&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1&&&&\\&0&1&&&\\&&0&&&\\&&&0&1&\\&&&&0&1\\&&&&&0\end{pmatrix}$

4阶：$\begin{pmatrix}0&&&&&\\&0&&&&\\&&0&1&&\\&&&0&1&\\&&&&0&1\\&&&&&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1&&&&\\&0&&&&\\&&0&1&&\\&&&0&1&\\&&&&0&1\\&&&&&0\end{pmatrix}$,

5阶：$\begin{pmatrix}0&&&&&\\&0&1&&&\\&&0&1&&\\&&&0&1&\\&&&&0&1\\&&&&&0\end{pmatrix}$

6阶：$\begin{pmatrix}0&1&&&&\\&0&1&&&\\&&0&1&&\\&&&0&1&\\&&&&0&1\\&&&&&0\end{pmatrix}$

思考题 5.9. 假设 J 是 Jordan 形幂零矩阵. 证明: J 中的各个 Jordan 块的阶数最大值等于 J (作为幂零矩阵) 的幂零阶. ■

证：设 $J=\begin{pmatrix}J_1&&\\&\ddots&\\&&J_r\end{pmatrix}$ 其中 J_i 为幂零 Jordan 块，阶数为 n_i，$i\in[\![1,r]\!]$

$J^k=\begin{pmatrix}J_1^k&&\\&\ddots&\\&&J_r^k\end{pmatrix}$. 故 J 的幂零阶 $=$ J_i 幂零阶的最大值 $=\max\limits_i\{n_i\}$

习题 5.1.1. 定义复向量空间 $\mathbb{C}^3$ 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 如下:

$$\mathscr{A}:\ \mathbb{C}^3\longrightarrow\mathbb{C}^3;\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}3x+y-2z\\-x+5z\\-x-y+4z\end{pmatrix}.$$

求 $\mathscr{A}$ 的所有特征值及相应的广义特征子空间.

解：令 $\varepsilon=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$，$\mathcal{M}_\varepsilon(\mathscr{A})=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\1&0&-1\\-2&5&4\end{pmatrix}^T$

$$|\lambda I-\mathcal{M}_\varepsilon(\mathscr{A})|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&2\\1&\lambda&-5\\1&1&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-3)=0\Rightarrow\lambda_1=2,\ \lambda_2=3.$$

$$(\lambda_1 I-\mathcal{M}_\varepsilon(\mathscr{A}))^2X=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&1&-1\\-4&-2&2\\2&1&-1\end{pmatrix}X=0\Leftrightarrow X\in\operatorname{span}\{(0,1,1)^T,(1,0,2)^T\}$$

$$(\lambda_2 I-\mathcal{M}_\varepsilon(\mathscr{A}))X=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&3&-5\\1&1&-1\end{pmatrix}X=0\Leftrightarrow X\in\operatorname{span}\{(-1,2,1)^T\}$$

故有特征值 2，3，$G(\lambda_1,\mathscr{A})=\operatorname{span}\{\qquad\}$，$G(\lambda_2,\mathscr{A})=\operatorname{span}\{\qquad\}$

习题 5.1.2. 设 $\mathscr{A}$ 是 K-向量空间 V 上的可逆线性变换，$\mathscr{A}^{-1}$ 为其逆变换. 证明：对于任意 $0\neq\lambda\in K$，$G(\lambda,\mathscr{A})=G(\lambda^{-1},\mathscr{A}^{-1})$.

证：只证 $G(\lambda,\mathscr{A})\subseteq G(\lambda^{-1},\mathscr{A}^{-1})$，

$\forall v\in G(\lambda,\mathscr{A})=\operatorname{Ker}(\lambda I-\mathscr{A})^n$，其中 $n=\dim V$.

$$(\lambda^{-1}I-\mathscr{A}^{-1})^n=\mathscr{A}^{-n}(\lambda^{-1}\mathscr{A}-I)^n=\lambda^{-n}\mathscr{A}^{-n}(\mathscr{A}-\lambda I)^n$$

$$\Rightarrow(\lambda^{-1}I-\mathscr{A}^{-1})^n v=(\lambda^{-1}\mathscr{A}^{-1})^n(\mathscr{A}-\lambda I)^n v=0$$

$$\Rightarrow v\in\operatorname{Ker}(\lambda^{-1}I-\mathscr{A}^{-1})^n=G(\lambda^{-1},\mathscr{A}^{-1})$$

习题 5.1.3. 假设 $\dim V=3$，$\mathscr{A}\in\operatorname{End}(V)$ 在某一组有序基下的矩阵为 A. 对以下两种情况分别讨论 $\mathscr{A}$ 是否是幂零变换. 如是，它的幂零阶是多少？

$$(1)\ A=\begin{pmatrix}0&-3&3\\-2&-7&13\\-1&-4&7\end{pmatrix};\qquad(2)\ A=\begin{pmatrix}3&6&-15\\1&2&-5\\1&2&-5\end{pmatrix}.$$

解：(1) $A^2=\begin{pmatrix}3&9&-18\\1&3&-6\\1&3&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}(1\ \ 3\ \ -6)$，$A^4=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 3\ -6)\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 3\ -6)=0$

$\Rightarrow$ A是幂零阵且幂零阶为3，$\mathscr{A}$同理.

(2) $A=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}(1\ \ 2\ \ -5)$，$A^2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\cdot0\cdot(1\,2\,5)=0$

$\Rightarrow$ A是幂零阵且幂零阶为2，$\mathscr{A}$同理.

习题 5.1.4. 举例说明存在实方阵 A 满足: A 不是幂零矩阵, 但 0 是 A 唯一的实特征值.

$$A=\begin{pmatrix}0&&\\&&-1\\&1&\end{pmatrix},\quad |\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&&\\&\lambda&1\\&-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+\lambda=\lambda(\lambda^2+1)$$

习题 5.1.6. 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}\in\mathrm{End}(V)$. 假设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 都是幂零变换.

1. 证明: 若 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 可交换, 则 $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ 一定是幂零变换.
2. 举例说明: 若 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 不可交换, 则 $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ 可能不是幂零变换.
3. $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 是否一定是幂零变换? 若是, 请给出证明; 若否, 请举出反例.

证: 1. 设 $\mathscr{A}^n=\mathscr{B}^m=0$, 则 $(\mathscr{A}+\mathscr{B})^{n+m}=\sum_{i=0}^{m+n}\binom{n+m}{i}\mathscr{A}^{n+m-i}\mathscr{B}^i=0$

2. 令 $\dim V=2$, $M_\varepsilon(\mathscr{A})=\begin{pmatrix}&0\\1&\end{pmatrix}$, $M_\varepsilon(\mathscr{B})=\begin{pmatrix}&1\\0&\end{pmatrix}$

$M_\varepsilon(\mathscr{A}+\mathscr{B})=\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}$, $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}=2$. 故 $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ 不幂零.

3. $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 取 2 中变换. $M_\varepsilon(\mathscr{A}\mathscr{B})=\begin{pmatrix}0&\\&1\end{pmatrix}$, 故 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 不幂零.

习题 5.1.7. 设 $\mathscr{A}\in\mathrm{End}(V)$ 为幂零变换. 对任意非零常数 $\alpha\in K$, 证明 $\alpha I+\mathscr{A}$ 是可逆变换并求出 $(\alpha I+\mathscr{A})^{-1}$.

证: 记 $n=\dim V$, 则有 $\mathscr{A}^n=0$, 观察到

$$(\alpha I+\mathscr{A})(\alpha^{-1}I-\alpha^{-2}\mathscr{A}+\alpha^{-3}\mathscr{A}^2+\cdots+(-1)^{n-1}\alpha^{-n}\mathscr{A}^{n-1})=I+(-1)^{n-1}\alpha^{-n}\mathscr{A}^n=I$$

且 $\alpha I+\mathscr{A}$ 与 $\alpha^{-1}I-\alpha^{-2}\mathscr{A}+\cdots+(-1)^{n-1}\alpha^{-n}\mathscr{A}^{n-1}$ 均为 $\mathscr{A}$ 的多项式, 故可交换.

故 $(\alpha I+\mathscr{A})^{-1}=\alpha^{-1}I-\alpha^{-2}\mathscr{A}+\cdots+(-1)^{n-1}\alpha^{-n}\mathscr{A}^{n-1}$

高等代数II习题课

HW3　2025.3.14.

思考题 5.10. 考虑 Jordan 形矩阵

$$J=\begin{pmatrix} J_2(1) & & & \\ & J_2(2) & & \\ & & J_1(3) & \\ & & & J_4(4)\end{pmatrix} \quad 和 \quad J'=\begin{pmatrix} J_1(3) & & & \\ & J_4(4) & & \\ & & J_2(2) & \\ & & & J_2(1)\end{pmatrix}.$$

写出一个可逆矩阵 $P\in\mathbf{M}_9(K)$ 使 $P^{-1}JP=J'$.

$$\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & I_2 & & \\ I_2 & & & \\ & & & I_4\end{pmatrix} J \begin{pmatrix} & & I_2 & \\ & I_2 & & \\ 1 & & & \\ & & & I_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(3) & & & \\ & J_2(2) & & \\ & & J_2(1) & \\ & & & J_4(4)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & I_4 \\ & & I_2 & \\ & I_2 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & I_2 & & \\ I_2 & & & \\ & & & I_4\end{pmatrix} J \begin{pmatrix} & & I_2 & \\ & I_2 & & \\ 1 & & & \\ & & & I_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & I_2 \\ & & I_2 & \\ & I_4 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(3) & & & \\ & J_4(4) & & \\ & & J_2(1) & \\ & & & J_2(2)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & I_4 & & \\ & & & I_2 \\ & & I_2 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & I_4 \\ & & I_2 & \\ & I_2 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & I_2 & & \\ I_2 & & & \\ & & & I_4\end{pmatrix} J \begin{pmatrix} & & I_2 & \\ & I_2 & & \\ 1 & & & \\ & & & I_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & I_2 \\ & & I_2 & \\ & I_4 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & I_4 & & \\ & & & I_2 \\ & & I_2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(3) & & & \\ & J_4(4) & & \\ & & J_2(2) & \\ & & & J_2(1)\end{pmatrix}$$

故令 $P=\begin{pmatrix} & & I_2 & \\ & & & I_2 \\ 1 & & & \\ & I_4 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & I_4 & & \\ & & & I_2 \\ & & I_2 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & & I_2 \\ & & I_2 & \\ 1 & & & \\ & I_4 & & \end{pmatrix}$ 即可.

习题 5.1.10. 设 $n=\dim V$, $\mathscr{A}\in\mathrm{End}(V)$ 为幂零变换. 设 $\dim E(0,\mathscr{A})=k$. 证明 $\mathscr{A}^{n-k+1}=0$.

解: 设 $J=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k\end{pmatrix}$ 为 $\mathscr{A}$ 对应的 Jordan 矩阵, 其中 J_i 为 n_i 阶 Jordan 块.

且要求 $n_1\le n_2\le\cdots\le n_k$, 则

$$n_k=n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}\le n-(k-1)=n-k+1$$

故 $\mathscr{A}^{n-k+1}=0$.

习题 5.1.12. 设 $\mathscr{A}\in\mathrm{End}(V)$ 满足 $\dim\mathrm{Ker}(\mathscr{A}^4)=8$, $\dim\mathrm{Ker}(\mathscr{A}^6)=9$.

证明: 对于所有自然数 $m\ge 5$ 均有 $\dim\mathrm{Ker}(\mathscr{A}^m)=9$.

$\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^4\subseteq\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^5\subseteq\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^6 \Rightarrow 8\le\dim\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^5\le 9$.

若 $\dim\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^5=8$, 则 $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^4=\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^5\Rightarrow\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^6=\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^5$, 与其维数矛盾.

故 $\dim \ker \mathscr{A}^5 = 9$，即 $\ker \mathscr{A}^5 = \ker \mathscr{A}^6$.

故 $\forall m \geq 5$, $\dim \ker \mathscr{A}^m = \dim \ker \mathscr{A}^5 = 9$

习题 5.1.15. 设 $n = \dim V \geq 2$, $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 满足 $\mathrm{Ker}(\mathscr{A}^{n-2}) \neq \mathrm{Ker}(\mathscr{A}^{n-1})$.
证明: $\mathscr{A}$ 至多有两个不同的特征值.

证：由 $\mathrm{Ker}(\mathscr{A}) \subseteq \ker \mathscr{A}^2 \subseteq \cdots \subseteq \ker \mathscr{A}^{n-2} \subseteq \ker \mathscr{A}^{n-1}$，且 $\ker \mathscr{A}^{n-2} \neq \ker \mathscr{A}^{n-1}$

上述包含均为真包含，故 $\dim \ker \mathscr{A} = 0$, 1 或 2.

① 若 $\dim \ker \mathscr{A} = 0$，则 $\ker \mathscr{A}^m = 0$ $\forall m \in \mathbb{N}$，矛盾

② 若 $\dim \ker \mathscr{A} \geq 1$，则 $\dim \ker \mathscr{A}^{n-1} \geq n-1$.

由于 $\ker \mathscr{A}^{n-1}$ 为 $\mathscr{A}$ 的不变子空间且特征值只有 0.

故 $\mathscr{A}$ 至多有两个特征值

习题 5.1.16. 设 $n = \dim V \geq 2$, $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$. 假设 K 中有两个不同的非零常数都是 $\mathscr{A}$ 的特征值.
证明:

1. 对任意自然数 $m \geq n-2$ 均有 $\mathrm{Ker}(\mathscr{A}^m) = \mathrm{Ker}(\mathscr{A}^{n-2})$.
2. $V = \mathrm{Ker}(\mathscr{A}^{n-2}) \oplus \mathrm{Im}(\mathscr{A}^{n-2})$.

证：

1. 假设 $\mathscr{A}$ 有两个非零特征值 λ_1, λ_2

$$V = \bigoplus_{\lambda \text{为}\mathscr{A}\text{的特征值}} G(\mathscr{A}, \lambda) \supseteq \bigoplus_{\lambda \in \{0, \lambda_1, \lambda_2\}} G(\mathscr{A}, \lambda) \supseteq \bigoplus_{\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}} \ker(\mathscr{A}, \lambda) \oplus G(\mathscr{A}, 0)$$

$\Rightarrow \dim G(\mathscr{A}, 0) \leq n - \dim \ker(\mathscr{A}, \lambda_1) - \dim \ker(\mathscr{A}, \lambda_2) \leq n-2$

因此 $\ker \mathscr{A}^{n-2} = G(\mathscr{A}, 0) = \ker \mathscr{A}^n$

故 $\ker \mathscr{A}^m = \ker \mathscr{A}^{n-2}$ $\forall m \geq n-2$

2. $\forall v \in \ker \mathscr{A}^{n-2} \cap \mathrm{Im} \mathscr{A}^{n-2}$，$\exists v' \in V$ s.t. $\mathscr{A}^{n-2} v' = v$ 且 $\mathscr{A}^{n-2} v = 0$.

$\forall n \geq 2$，$0 = \mathscr{A}^{n-2} v = \mathscr{A}^{2n-4} v' = \mathscr{A}^{n-2} v' = v$. 由维度公式，$V = \ker \mathscr{A}^{n-2} \oplus \mathrm{Im} \mathscr{A}^{n-2}$.

习题 5.1.17. 设 A 为 $\mathbf{M}_n(K)$ 中的幂零矩阵. 定义 $V=\mathbf{M}_n(K)$ 上的线性变换

$$\mathscr{A}: V \longrightarrow V;\quad X \longmapsto AX-XA.$$

证明 $\mathscr{A}$ 是个幂零变换.

证:

$$\mathscr{A}^m X = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} A^{m-i} X A^i$$

若 $\mathscr{A}^K=0$, 则 $\mathscr{A}^{2K} X = \sum (-1)^i \binom{2k}{i} A^{2k-i} X A^i = 0$

习题 5.1.21. 验证以下矩阵 A 为幂零矩阵, 并将其化为 Jordan 标准形:

(1) $A=\begin{pmatrix}0&2&3&4\\0&0&2&3\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$; (2) $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\-4&-2&0&0\\7&1&1&1\\-17&-6&-1&-1\end{pmatrix}$; (3) $A=\begin{pmatrix}0&3&0&-3\\2&7&0&-13\\0&3&0&-3\\1&4&0&-7\end{pmatrix}$.

(2) 令 $\mathscr{A}: K^4 \to K^4: X \to AX$. K^4 的一组标准基为 $\varepsilon=(e_1,e_2,e_3,e_4)$

$\mathscr{A}^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. 故 A 幂零且 A 的标准型 J 的最大 Jordan 块为2阶.

对 A 初等列变换得 $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&-2&0&0\\0&1&1&0\\0&-6&-1&0\end{pmatrix}$.

$\operatorname{Im}\mathscr{A}=\operatorname{span}\{e_1-2e_2+e_3-6e_4,\ e_3-e_4\}$. 故 J 有两个 Jordan 块.

综上 $J=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&&\\&&0&1\\&&&0\end{pmatrix}$

且 $\mathscr{A}e_2=e_1-2e_2+e_3-6e_4$, $\mathscr{A}e_3=e_3-e_4$

故取基 $(e_1-2e_2+e_3-6e_4,\ e_2,\ e_3-e_4,\ e_3)=:\Theta$,

$M_\Theta(\mathscr{A})=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&&\\&&0&1\\&&&0\end{pmatrix}=J$

(3) 令 $\mathscr{A}: K^4 \to K^4 : X \mapsto AX$，$K^4$ 的一组标准基为 $\varepsilon=(e_1,e_2,e_3,e_4)$

$$A^2 = \begin{pmatrix}3&9&0&-18\\1&3&0&-6\\3&9&0&-18\\1&3&0&-6\end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix}3\\1\\3\\1\end{pmatrix}(1\ 3\ 0\ -6)\begin{pmatrix}0&3&0&-3\\2&7&0&-13\\0&3&0&-3\\1&4&0&-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\3\\1\end{pmatrix}(0\ 0\ 0\ 0)=0$$

故 A 是幂零的，且 A 的 Jordan 标准形 J 的最大 Jordan 块的阶数为 3.

故 $J=\begin{pmatrix}0&&&\\&0&1&\\&&0&1\\&&&0\end{pmatrix}$

$\operatorname{Im}\mathscr{A}^2 = \operatorname{span}(3e_1+e_2+3e_3+e_4)$ 且，由 A^2 的表达式知，$\mathscr{A}^2e_1=3e_1+e_2+3e_3+e_4$

在基 $\theta := (e_3, \mathscr{A}^2e_1, \mathscr{A}e_1, e_1)$ 下，$M_\theta(\mathscr{A})=J$.

习题 5.1.23. 设 $\mathscr{A}\in \mathrm{End}(V)$ 在 V 的一组有序基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}0&&&&\\-1&0&&&\\&-1&0&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&-1&0\end{pmatrix}.$$

求 $\mathscr{A}$ 在 V 中的一组 Jordan 基.

$$A^k=\begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\(-1)^k&\cdots&\cdots&\vdots\\\vdots&\ddots&&\vdots\\0&\cdots(-1)^k&\cdots&0\end{pmatrix}-k+1\text{行}$$，故 $A^{n-1}=\begin{pmatrix}0&0\\(-1)^{n-1}&0\end{pmatrix}$，$A^n=1$.

故 A 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&1&\\&&\ddots&\ddots\\&&&0&1\\&&&&0\end{pmatrix}=:J$

由 A^{n-1} 的表达式知，$\mathscr{A}^{n-1}((-1)^{n-1}e_1)=e_n$，

取 $\theta:=\left(\mathscr{A}^{n-1}((-1)^{n-1}e_1),\ \mathscr{A}^{n-2}((-1)^{n-1}e_1),\ \cdots,\ \mathscr{A}((-1)^{n-1}e_1),\ (-1)^{n-1}e_1\right)$

$M_\theta(\mathscr{A})=J$

习题 5.2.4. 设 5 阶方阵 A 满足下列条件:

$$\mathrm{rank}(A)=3,\ \mathrm{rank}(A^2)=2,\ \mathrm{rank}(A+I_5)=4,\ \mathrm{rank}(A+I_5)^2=3.$$

求 A 的 Jordan 标准形.

$$\begin{pmatrix}0&&&&\\&0&1&&\\&&0&&\\&&&-1&1\\&&&&-1\end{pmatrix}$$

高等代数Ⅱ习题课

HW4　廿　2025.3.17

思考题 5.12. 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. 写出矩阵 A 的 Jordan–Chevalley 分解.
2. 找出 A 的 Jordan 标准形 J, 并写出矩阵 J 的 Jordan–Chevalley 分解.
3. 记 $\mathscr{A}$ 为线性变换 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $X \mapsto AX$. 以上两个小题的结果是否和 $\mathscr{A}$ 的 Jordan–Chevalley 分解唯一性矛盾？为什么？ ■

解：1. $A = I_3 + \begin{pmatrix} & 1 & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

2. 易知 A 的特征值只有 1, $\operatorname{rank}(I_3 - A) = 1$. 故 $J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} = I_3 + \begin{pmatrix} & & \\ & & 1 \\ & & \end{pmatrix}$

3. 观察得 $\ker(\mathscr{A} - 1) = \operatorname{span}\{e_1, e_2 - e_3\}$. 且 $(\mathscr{A} - 1)(e_2) = e_2 + e_1 - e_2 = e_1$

故在基 $\Theta := \{e_2 - e_3, e_1, e_2\}$ 下, $M_\Theta(\mathscr{A}) = J$

故令 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & & 1 \\ -1 & & \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = J = I_3 + \begin{pmatrix} & & \\ & & 1 \\ & & \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = I_3 + PE_{23}P^{-1} = E_{13}\begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix} = E_{12} + E_{13} = \begin{pmatrix} & 1 & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

故不矛盾.

思考题 5.13. 设 T 是有限维 K-向量空间 V 上的可逆线性变换. 证明:

1. T 的特征多项式常数项一定不等于 0.
2. 存在多项式 $g \in K[X]$ 使得 $T^{-1} = g(T)$. (因此, 如果 T 可以表示为某线性变换 $\mathscr{A} \in \operatorname{End}(V)$ 的多项式, 则 T^{-1} 也可以写成 $\mathscr{A}$ 的多项式.) ■

1. 若 T 的特征多项式 $f_T(x)$ 常数项为零, 则 T 有特征值 0.
则 T 不满, 与可逆矛盾.

$n = \dim V$

2. 由 Cayley–Hamilton 定理, T^{-1} 的特征多项式 $h(x) = x^n - h_1(x)$ s.t. $h(T^{-1}) = 0$.
其中 n 为有限维空间维数, $\deg h_1 \leq n-1$　即 $T^{-n} - h_1(T^{-1}) = 0$.
故有 $T \cdot T^{n-1} h_1(T^{-1}) = 1$. 其中 $T^{n-1} h_1(T^{-1})$ 为关于 T 的多项式.
即 $h_1(T^{-1}) \cdot T^{n-1} = T^{-1}$.

思考题 5.15. 记号如定义 5.2.18. 不使用 Cayley–Hamilton 定理, 你能否证明线性变换 $\mathscr{A}$ (或矩阵 $A \in \mathbf{M}_n(K)$) 总有非零的零化多项式? ■

设 A 在 $\mathbb{C}$ 上总能化成 Jordan 标准形. 设 $J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix} = P^{-1}AP$

其中 λ_i 为 A 的特征值, (λ_i 可能重复也可能不在 K 中); $P \in M_n(\mathbb{C})$ 可逆.

考虑多项式 $f(x) = (x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_r)^{n_r}$.

$f(x) = |x 1_n - J| = |P^{-1}| \cdot |x 1_n - A| \cdot |P| = |x 1_n - A|$, 故 f 的系数均在 K 中.

即 $f(x) \in K[x]$ 且非零.

令 $\mathscr{A}: K^n \to K^n : X \to AX$, 有 $K^n = \bigoplus\limits_{i \in [\![1,r]\!]} G(\lambda_i, \mathscr{A})$.

$\forall X \in K^n$, X 能唯一分解成 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$, $X_i \in G(\lambda_i, \mathscr{A})$

$$f(\mathscr{A})(X) = \sum_{i=1}^{r} f(\mathscr{A})(X_i) = 0 \qquad (x-\lambda_i)^{n_i} \text{ 与 } (x-\lambda_j)^{n_j} \text{ 可交换}$$

故 $f(\mathscr{A}) = 0$. 即 $f(A) = 0$ (用 End V 或 $Mat_{n\times n}$ 的维数分析也行

思考题 5.19. 设 J_1 和 J_2 为 Jordan 形矩阵, 其中的 Jordan 块都按照从左上到右下逐渐增大 (未必严格增大) 的方式排列. 假设 J_1 和 J_2 的特征多项式和最小多项式都相同. 是否可以断定 $J_1 = J_2$? 若是, 请解释为什么. 若否, 请举出反例. ■

否! $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$, 其特征多项式与最小多项式为

$f_{J_1}(x) = f_{J_2}(x) = x^5 \qquad g_{J_1}(x) = g_{J_2}(x) = x^3$

习题 5.2.1. 将以下矩阵化为 Jordan 标准形 (3) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$;

令 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. $|xI_3 - A| = \begin{vmatrix} x-4 & -6 & 15 \\ -1 & x-3 & 5 \\ -1 & -2 & x+4 \end{vmatrix} = (x-1)^3 \Rightarrow A$ 的特征值为 $\lambda = 1$.

$\mathrm{rank}(I_3 - A) = 1 \Rightarrow A$ 的 Jordan 标准形 J 为 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$(I_3-A)X = \begin{pmatrix}-3&-6&15\\-1&-2&5\\-1&-2&5\end{pmatrix}X = 0 \Rightarrow X = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

又 $(I_3-A)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$，故令 $P = \begin{pmatrix}2&-3&1\\-1&-1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$. $P^{-1}AP = J$

习题 5.2.2. 将以下矩阵化为 Jordan 标准形:

$$(1)\quad \begin{pmatrix}2&2&1&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&-1&-1&1\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix};$$

记为A. 设 $\mathcal{A}: K^5 \to K^5: X \mapsto AX$.

$|xI_5 - A| = (x-2)^2(x+1)^3 = 0 \Rightarrow x = -1$ 或 2.

$\mathrm{rank}(A+I_5) = 4$，$\mathrm{rank}(A-2I_5) = 4$.

故 A 的 Jordan 标准形 $J = \begin{pmatrix}2&1&&&\\&2&&&\\&&-1&1&\\&&&-1&1\\&&&&-1\end{pmatrix}$

$\ker(\mathcal{A}-2) = \mathrm{span}\{e_1\}$ 且 $(\mathcal{A}-2)e_2 = 2e_1$

故取 $v_2 = e_2$，$v_1 = \mathcal{A}e_2 = 2e_1$

$(A+I_5)^2 = \begin{pmatrix}9&12&3&-1&1\\0&9&0&0&0\\0&0&0&0&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，$(A+I_5)^3 = \begin{pmatrix}27&54&9&-3&1\\0&27&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\ker(\mathcal{A}+1) = \mathrm{span}\{3e_3 - e_1\}$，$\ker(\mathcal{A}+1)^2 = \mathrm{span}\{3e_3 - e_1, e_1 + 9e_4\}$，

$\ker(\mathcal{A}+1)^3 = \mathrm{span}\{-e_1+3e_3, e_1+9e_4, e_1-27e_5\}$.

令 $v_5 = e_1 - 27e_5$，$v_4 = (\mathcal{A}+1)v_5 = 3e_1 - 27e_3 - 54e_4$，$v_3 = (\mathcal{A}+1)^2 v_5 = -18e_1 + 54e_3$

故在基 $\theta = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)\begin{pmatrix}2&&-18&3&1\\&1&&&\\&&54&-27&\\&&&-54&\\&&&&-27\end{pmatrix}$ 记为P

$M_\theta(\mathcal{A}) = J$. 故 $P^{-1}AP = J$.

习题 5.2.3. 令 $A = \begin{pmatrix}0&0&-2\\1&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}$. 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 求出 A^n.

解：$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda & & 2 \\ -1 & \lambda & -3 \\ & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 2 - 3\lambda = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1$

$I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$\operatorname{rank}(I_3 - A) = 2 \Rightarrow A$ 的Jordan标准形 $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$

令 $\mathscr{A}: K^3 \to K^3;\ X \to AX$.　　$\ker(1-\mathscr{A}) = \operatorname{span}\{2e_1 - e_2 - e_3\}$

$(I_3 - A)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$，$\ker(1-\mathscr{A})^2 = \operatorname{span}\{2e_1 + e_2,\ 4e_1 - e_3\}$

$(1-\mathscr{A})^2(2e_1 + e_2) = 0$ 且 $(1-\mathscr{A})(2e_1 + e_2) = 2e_1 - e_2 - e_3 \in \ker(1-\mathscr{A})$

故取 $v_2 = 2e_1 + e_2$，$v_1 = (1-\mathscr{A})v_2 = 2e_1 - e_2 - e_3$

$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\ker(A - 2I_3) = \operatorname{span}\{e_1 - 2e_2 + e_3\}$

取 $v_3 = e_1 - 2e_2 + e_3$.

记为 P

则在基 $\theta = (v_1, v_2, v_3) = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & & 1 \end{pmatrix}$ 下，$M_\theta(\mathscr{A}) = J$.

故 $A = PJP^{-1}$，$A^n = PJ^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & n & \\ & 1 & \\ & & (-2)^n \end{pmatrix}P^{-1}$，其中 $P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^n = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 - 6n + (-2)^n & 2 - 6n + (-2)^{n+1} & -4 - 6n + (-2)^{n+2} \\ 2 + 3n + (-2)^{n+1} & 5 + 3n + (-2)^{n+2} & 8 + 3n + (-2)^{n+3} \\ -1 + 3n + (-2)^n & 2 + 3n + (-2)^{n+1} & 5 + 3n + (-2)^{n+2} \end{pmatrix}$$

习题 5.2.5. 设 $\mathscr{A}$ 是有限维复向量空间 V 上的线性变换, J 为 $\mathscr{A}$ 的 Jordan 标准形. 设 λ_0 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征值, $\mathscr{B} := A - \lambda_0 I$. 应为$\mathscr{A}$

1. 对每个 $i \in \mathbb{N}$, 令 $M_i = \operatorname{Ker}(\mathscr{B}^i)$, $k := \min\{i \in \mathbb{N} \mid M_i = M_{i+1}\}$. 证明: k 等于 J 中以 λ_0 为特征值的 Jordan 块的最大阶数.
2. 设 k 如前一小题. 令 $N_k = \operatorname{Im}(\mathscr{B}^k)$. 证明 λ_0 不是 $\mathscr{A}|_{N_k}$ 的特征值, 因此 $\mathscr{B}|_{N_k}$ 是可逆变换.
3. 证明 $\dim M_k$ 等于特征值 λ_0 的 (代数) 重数.
4. 设 λ_1 也是 $\mathscr{A}$ 的特征值, $\lambda_1 \neq \lambda_0$. 证明 $G(\lambda_1, \mathscr{A}) \subseteq \operatorname{Im}(\mathscr{B}^k) = N_k$.

1. 令 $\dim V = n$.

$\forall i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_i = \ker((\mathscr{A}-\lambda_0 I)^i) \subset \ker((\mathscr{A}-\lambda_0 I)^n) = G(\lambda_0, \mathscr{A})$

令 $J = \begin{pmatrix} J(\lambda_0) & & & \\ & J(\lambda_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_r) \end{pmatrix}$, 其中 $J(\lambda_i)$ 为 $\begin{pmatrix} J_{m_{i1}}(\lambda_i) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_{il_i}}(\lambda_i) \end{pmatrix}$,

$\lambda_i \neq \lambda_j$, $\forall i \neq j$. 且 $m_{i1} \leq m_{i2} \leq \cdots \leq m_{il_i}$, $\forall i \in [0, r]$. l_i 为以 λ_i 为特征值的 Jordan 块的个数.

若 $J = \mathcal{M}_\theta(\mathscr{A})$, 则 $\mathcal{M}_\theta(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} J(\lambda_0)-\lambda_0 I & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_r)-\lambda_0 I \end{pmatrix}$.

由于 $\mathcal{M}_K \subset G(\lambda_0, \mathscr{A})$, 只需考虑 $J(0)$ 即可.

$$(J(\lambda_0)-\lambda_0 I)^k = \begin{pmatrix} J_{m_{01}}^k(0) & & & \\ & J_{m_{02}}^k(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_{0l_0}}^k(0) \end{pmatrix}$$

根据 $J_m(0)$ 矩阵的幂零性可知, $K = m_{0l_0}$.

2. 若 $v \in \operatorname{Im} \mathscr{B}^k$ 且 $v \in \ker \mathscr{B}$, 则 $\exists v' \in \mathcal{M}$ s.t. $v = \mathscr{B}^k(v')$, $\mathscr{B}v = \mathscr{B}^{k+1}(v') = 0$

$\Rightarrow v' \in \mathcal{M}_{k+1} = \mathcal{M}_k \Rightarrow v = \mathscr{B}^k(v') = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Im} \mathscr{B}^k \cap \ker \mathscr{B} = 0$ 即 0 不是 $\mathscr{B}|_{N_k}$ 的特征值 $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{B}|_{N_k}$ 可逆.

3. 由命题 5.2.4, 只需证 $\mathcal{M}_K = G(\lambda_0, \mathscr{A})$,

由 K 的定义, $\mathcal{M}_K = \mathcal{M}_n = G(\lambda_0, \mathscr{A})$

4. 由于 $G(\lambda_1, \mathscr{A})$ 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, $G(\lambda_1, \mathscr{A})$ 也是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间.

故 $\mathscr{B}^k|_{G(\lambda_1, \mathscr{A})}: G(\lambda_1, \mathscr{A}) \longrightarrow G(\lambda_1, \mathscr{A})$ 为限制映射.

现证明 $\mathscr{B}^k|_{G(\lambda_1, \mathscr{A})}$ 是满射即可. 即证明 $\mathscr{B}^k|_{G(\lambda_1, \mathscr{A})}$ 是单的 (有限维)

$\ker \mathscr{B}^k|_{G(\lambda_1, \mathscr{A})} = G(\lambda_0, \mathscr{A}) \cap G(\lambda_1, \mathscr{A}) = \{0\}$. 故证毕.

习题 5.2.11. 设 $a \in K$. 求 $\mathbf{M}_n(K)$ 中最小多项式为 $X-a$ 的所有矩阵.

$$\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

习题 5.2.12. 设 $J=J_n(0)$, $V=\mathbf{M}_n(K)$. 通过矩阵乘法定义线性变换 $\mathscr{A}: V\to V$, $M\mapsto JM$. 求 $\mathscr{A}$ 的最小多项式和特征多项式.

① $J^n=0$, $J^{n-1}=E_{1n}$,

$\mathscr{A}^n(M)=J^nM=0$, $\mathscr{A}^{n-1}(E_{nn})=J^{n-1}E_{nn}=E_{1n}\neq 0$.

故 $\mathscr{A}$ 之最小多项式为 $f(x)=x^n$ 之因式, 且 $\mathscr{A}^{n-1}\neq 0$.

于是 $\mathscr{A}$ 之最小多项式为 $f(x)=x^n$

② 易知 $\mathscr{A}$ 只有一个特征值, 0. 故特征多项式为 $g(x)=x^{n^2}$

高等代数II习题课-HW5

2025.3.28

习题 5.2.13. 求以下矩阵 A 的最小多项式:

$$A=\begin{pmatrix} & & & -a_n \\ 1 & & & -a_{n-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

解：先考虑 $K=\mathbb{C}$.

$$|\lambda I_n-A|=\begin{vmatrix} \lambda & & & a_n \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \lambda & a_2 \\ & & -1 & \lambda+a_1 \end{vmatrix}=\lambda^{n-1}\left(\lambda+a_1+\frac{a_2}{\lambda}+\cdots+\frac{a_n}{\lambda^{n-1}}\right)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n.$$

令 $\mathscr{A}:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n;\ X\mapsto AX$. 令 λ_i 为 $\mathscr{A}$ 的任一特征值，$\lambda_iI_n-A=\begin{pmatrix} \lambda_i & & & a_n \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & \lambda_i+a_1 \end{pmatrix}$

其前 $n-1$ 列线性无关，故 $\operatorname{rank}(\lambda_iI_n-A)\geq n-1$，即 $\dim\ker(\lambda_i1-\mathscr{A})\leq 1$

又由于 λ_i 为一特征值，$\dim\ker(\lambda_i1-\mathscr{A})=1$.

故 $\mathscr{A}$ 在 $\mathbb{C}$ 上的最小多项式 $f_{\mathbb{C}}(x)$ 即为特征多项式.

若 K 为 $\mathbb{C}$ 的子域，$\mathscr{A}$ 在 K 上的极小多项式 $f_K(x)\in \operatorname{Ann}_{\mathbb{C}}(A)$

$\Rightarrow f_K(x)\mid f_{\mathbb{C}}(x)$

由整除得

由于 $\deg f_{\mathbb{C}}(x)=n\geq\deg f_K(x)$，故 $f_K(x)=f_{\mathbb{C}}(x)=|x\cdot I_n-A|$

习题 5.2.15. 设 $\mathscr{A}\in\operatorname{End}(V)$ 在 V 的一组有序基 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ 下的矩阵是 $A=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C\end{pmatrix}$, 其中

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & -1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix}\in\mathbf{M}_r(K),\quad C=\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 1 & & \\ & \lambda_2 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & \lambda_2 \end{pmatrix}\in\mathbf{M}_{n-r}(K).$$

1. 求 $\mathscr{A}$ 在 V 中的一组 Jordan 基.
2. 求 $\mathscr{A}$ 的最小多项式.

解：1. 由观察可知，A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{pmatrix} J_r(\lambda_1) & & \\ & J_{\lfloor\frac{n-r}{2}\rfloor}(\lambda_2) & \\ & & J_{\lceil\frac{n-r}{2}\rceil}(\lambda_2)\end{pmatrix}$

助教可以观察👀，
同学们最好是写下过程

故可取基 $\Theta:=\Big(\underbrace{(-1)^{r-1}e_1,\cdots,-e_{r-1},e_r}_{J_r(\lambda_1)},\underbrace{e_{r+2},e_{r+4},\cdots,e_{r+2\lfloor\frac{n-r}{2}\rfloor}}_{J_{\lfloor\frac{n-r}{2}\rfloor}(\lambda_2)},\underbrace{e_{r+1},e_{r+3},\cdots,e_{r-1+2\lceil\frac{n-r}{2}\rceil}}_{J_{\lceil\frac{n-r}{2}\rceil}(\lambda_2)}\Big)$

2.
$$g_{\mathscr{A}}(x)=\begin{cases}(x-\lambda_1)^r(x-\lambda_2)^{\lfloor\frac{n-r}{2}\rfloor} & 若\lambda_1\neq\lambda_2.\\ (x-\lambda_1)^{\min\{r,\lfloor\frac{n-r}{2}\rfloor\}} & 若\lambda_1=\lambda_2.\end{cases}$$

习题 5.2.16. 设 V 是有限维 K-向量空间.

1. 假设线性变换 $\mathscr{D}, \mathscr{D}' \in \mathrm{End}(V)$ 均可对角化, 并且二者的所有特征值 (不计重数意义下) 构成的集合均为 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$.

   证明: $\mathscr{D}=\mathscr{D}'$ 当且仅当对每个 $i \in [\![1, r]\!]$ 均有 $E(\lambda_i, \mathscr{D})=E(\lambda_i, \mathscr{D}')$.

2. 假设 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 有一种 Jordan–Chevalley 分解式 $\mathscr{A}=\mathscr{D}+\mathscr{N}$, 即, $\mathscr{D} \in \mathrm{End}(V)$ 可对角化, $\mathscr{N} \in \mathrm{End}(V)$ 是幂零变换, 且 $\mathscr{D}, \mathscr{N}$ 可交换. 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 是 $\mathscr{D}$ 的所有不同特征值.

   (a) 对每个 $i \in [\![1, r]\!]$, 令 $T_i := \mathscr{A}-\lambda_i I$. 证明: $E(\lambda_i, \mathscr{D})$ 是 $\mathscr{N}$ 和 T_i 的不变子空间, $\mathscr{N}|_{E(\lambda_i, \mathscr{D})}=T_i|_{E(\lambda_i, \mathscr{D})}$ 且 $E(\lambda_i, \mathscr{D}) \subseteq G(\lambda_i, \mathscr{A})$.

   (b) 证明: $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 恰为 $\mathscr{A}$ 的特征多项式的所有不同复数根, 而且 $E(\lambda_i, \mathscr{D})=G(\lambda_i, \mathscr{A})$.

3. 证明定理 5.2.11 中加法式 Jordan–Chevalley 分解式的唯一性*.

1. D 可对角 $\Rightarrow$ 存在一组基 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ 使得 $M_\varepsilon(D)$ 为对角阵.
即 ε 中均为特征向量. 记 $D\varepsilon_i=\alpha_i\varepsilon_i$, $\alpha_i\in\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\}$

$D=D' \Leftrightarrow$ 在基 ε 下, $M_\varepsilon(D)=M_\varepsilon(D')$

$\Leftrightarrow D'\varepsilon_i=D\varepsilon_i=\alpha_i\varepsilon_i \quad \forall i$

$\Leftrightarrow E(\lambda_i,D')=E(\lambda_i,D)$

2.(a) $\forall v\in E(\lambda_i,D)$, $DNv=NDv=\lambda_i Nv \Rightarrow Nv\in E(\lambda_i,D)$

$DT_iv=D(N+D-\lambda_iI)v=(N+D-\lambda_iI)Dv=\lambda_iT_iv$

$\Rightarrow E(\lambda_i,D)$ 为 N 和 T_i 的不变子空间

$T_iv=(N+D-\lambda_iI)v=Nv+Dv-\lambda_iv=Nv$

$\Rightarrow T_i|_{E(\lambda_i,D)}=N|_{E(\lambda_i,D)}$

$(A-\lambda_iI)v=T_iv=Nv$. N 幂零 $\Rightarrow \exists m\in\mathbb{N}$ s.t. $N^m=0$.

则 $(A-\lambda_iI)^mv=0 \Rightarrow v\in G(\lambda_i,A)$

(b) 若 λ 为 A 一特征值. 即 $\exists w\in V\setminus\{0\}$ s.t. $Aw=(D+N)w=\lambda w$

若 $N=0$, 则 λ 为 D 的一特征值 $\Rightarrow \exists i_0$ s.t. $\lambda=\lambda_{i_0}$.

若 $\mathcal{N}$ 幂零且 $\neq 0$，假设 $\mathcal{N}$ 的幂零阶为 k，则 $\mathcal{N}^k w=0$ 且 $\mathcal{N}^{k-1}w\neq 0$.
则 $\mathcal{N}^{k-1}w$ 为 $\mathcal{D}$ 的特征向量且特征值为 λ. $\Rightarrow \exists i_0$ s.t. $\lambda=\lambda_{i_0}$.

由于 $\mathcal{N},\mathcal{D}$ 可交换，$\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{A}=\mathcal{D}+\mathcal{N}$ 可交换.
$\Rightarrow G(\lambda_i,\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{D}$ 的不变子空间，故 $\mathcal{D}$ 在 $G(\lambda_i,\mathcal{A})$ 上可对角.
只证 $\mathcal{D}$ 在 $G(\lambda_i,\mathcal{A})$ 上的特征值仅有 λ_i 即可.
若 $\mathcal{D}v=\lambda v$，$v\in G(\lambda_i,\mathcal{A})\setminus\{0\}$
则 $(\mathcal{A}-\lambda 1)^n v=(\mathcal{D}-\lambda 1+\mathcal{N})^n v=\mathcal{N}^n v=0$ ($\mathcal{N}$ 幂零)
故 $v\in G(\lambda,\mathcal{A})\cap G(\lambda_i,\mathcal{A})$ 且 $v\neq 0 \Rightarrow \lambda=\lambda_i$

3. 由于 $\mathcal{A}$ 的广义特征子空间分解唯一 ($G(\lambda_i,\mathcal{A})=\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_i 1)^n$)，
对角部分 $\mathcal{D}$ 唯一. 故 $\mathcal{N}=\mathcal{A}-\mathcal{D}$ 唯一.

习题 5.2.17. 利用加法式 Jordan–Chevalley 分解的唯一性证明乘法式 Jordan–Chevalley 分解的唯一性.

若 $\mathcal{A}=\mathcal{D}\mathcal{U}$ 为 $\mathcal{A}$ 的一个 Jordan-Chevally 分解.
则 $\mathcal{A}=\mathcal{D}+\mathcal{D}(\mathcal{U}-I)$ 为 $\mathcal{A}$ 的一个加法式 Jordan-Chevally 分解.
故 $\mathcal{D}$ 唯一. 因此 $\mathcal{U}=\mathcal{D}^{-1}\mathcal{A}$ 唯一.

习题 5.2.18. 证明: 如果 $\mathscr{A}$ 是有限维向量空间 V 上的幂零变换, 则 $\mathscr{A}$ 是循环的当且仅当 $\mathscr{A}$ 的幂零阶等于 $\dim V$.

"$\Rightarrow$" 若 $\mathcal{A}$ 是循环的，$\exists v\in V$ s.t. $v,\mathcal{A}v,\dots,\mathcal{A}^{\dim V-1}v$ 为 V 的一组基.
故 $\mathcal{A}^{\dim V-1}\neq 0$. 由于 $\mathcal{A}$ 幂零，$\mathcal{A}^{\dim V}=0$.
"$\Leftarrow$" 若 $\mathcal{A}^{\dim V}=0$ 且 $\mathcal{A}^{\dim V-1}\neq 0$. 则有 $\ker\mathcal{A}^{\dim V-1}\subsetneq \ker\mathcal{A}^{\dim V}=V$.
故 $\ker\mathcal{A}^i\subsetneq\ker\mathcal{A}^{i+1}$ $\forall i\in[\![1,\dim V-1]\!]$
故 $\dim\ker\mathcal{A}^i=i$，即 $\mathrm{Im}\mathcal{A}^i=\dim V-i$.
任取 $v'\in\mathrm{Im}\mathcal{A}^{\dim V-1}\setminus\{0\}$，$\exists v\in V\setminus\{0\}$ s.t. $v'=\mathcal{A}^{\dim V-1}v$

考虑 向量组 $\mathscr{A}^{\dim V-1}v=v'$, $\mathscr{A}^{\dim V-2}v$, $\cdots$, $\mathscr{A}v$, v.

由于 $\mathscr{A}^k v\in \ker\mathscr{A}^{\dim V-k}\setminus\ker\mathscr{A}^{\dim V-k-1}$. 且 $\sum_{i=k+1}^{\dim V-1}\mathscr{A}^i v\in$

故 $\mathscr{A}^i v$, $i=0,1,\cdots,\dim V-1$ 线性无关. 故为V一组基. $\ker\mathscr{A}^{\dim V-k-1}$, $\forall k\in\mathbb{N}$

习题 5.2.19. 令 $V=K[X]_{\le n}$. 通过求多项式的形式导数定义线性变换 $\mathscr{D}: V\to V$, 即,

$$\mathscr{D}(1)=0,\quad \text{对 } k\in[\![1,n]\!],\quad \mathscr{D}(X^k)=kX^{k-1}.$$

证明 $\mathscr{D}$ 是一个循环的幂零变换, 并写出它的一组循环基.

X^n, $D(X^n)=nX^{n-1}$, $D^2(X)=n(n-1)X^{n-2}$, $\cdots$, $D^{n-1}(X)=n!X$, $D^n(X)=n!$

上述$n+1$个向量构成V的一组基. 故D循环.

且易知 $D^{n+1}=0$. 故D幂零.

习题 5.2.22. 设 V 是 n 维 K-向量空间. 假设线性变换 $\mathscr{A}\in\mathrm{End}(V)$ 的特征多项式 $P_{\mathscr{A}}(X)$ 的所有复数根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 都属于 K. 对于每个 $i\in[\![1,r]\!]$, 记 $m_i=\dim G(\lambda_i,\mathscr{A})$. 假设 $\mathscr{A}$ 的最小多项式等于其特征多项式 $P_{\mathscr{A}}(X)$. 根据命题 5.2.32, 可以取到向量 $v_i\in G(\lambda_i,\mathscr{A})$ 使得 $\mathscr{A}^{m_i-1}v_i,\cdots,\mathscr{A}v_i, v_i$ 构成 $G(\lambda_i,\mathscr{A})$ 的一组基.

1. 对任意多项式 $f\in K[X]$, 证明: 如果 $f(\mathscr{A})v_i=0$, 则对任何 $u\in G(\lambda_i,\mathscr{A})$ 均有 $f(\mathscr{A})u=0$.
2. 令 $v=v_1+\cdots+v_r$.

   证明向量组 $v,\mathscr{A}v,\cdots,\mathscr{A}^{n-1}v$ 是线性无关的. 由此证明 $\mathscr{A}$ 是循环变换.†.

   (提示: 对任意多项式 $f\in K[X]$, $f(\mathscr{A})v=f(\mathscr{A})v_1+\cdots+f(\mathscr{A})v_r$, 且每个 $G(\lambda_i,\mathscr{A})$ 都是 $f(\mathscr{A})$ 的不变子空间.)

证:

1. $\mathscr{A}^k v_i$, $k\in[\![0,m_i-1]\!]$ 为 $G(\lambda_i,\mathscr{A})$ 的一组基. $f(\mathscr{A})\mathscr{A}^k v_i=\mathscr{A}^k f(\mathscr{A})v_i=0$

   故 $f(\mathscr{A})=0$.

2. 若 $\sum_{i=0}^{n-1}a_i\mathscr{A}^i v=0$, 即 $\sum a_i\mathscr{A}^i v_1+\sum a_i\mathscr{A}^i v_2+\cdots+\sum a_i\mathscr{A}^i v_r=0$.

   由于 $V=\bigoplus_{k=1}^{r}G(\lambda_k,\mathscr{A})$, $\sum_{i=0}^{n-1}a_i\mathscr{A}^i v_k=0$ $\forall k\in[\![1,r]\!]$

   令 $f(\mathscr{A})=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\mathscr{A}^i$, 则 $f(\mathscr{A})\big|_{G(\lambda_k,\mathscr{A})}=0$ (由(1))

   故 $f(\mathscr{A})=0$. 即 $f(x)$ 为$\mathscr{A}$的零化多项式. 而 $\deg f=n-1$.

注意到 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $P_{\mathcal{A}}(x)$ 的次数为 n. 故 $f(x)=0$.

即 $\forall i$, $a_i=0$, 即 $v, \mathcal{A}v, \cdots, \mathcal{A}^m v$ 线性无关.

因此 $\mathcal{A}$ 循环.

思考题 5.22. 设 $f_1, \cdots, f_r \in K[X]$ (其中 $r \geq 2$) 均为非零多项式, $P \in K[X]$ 是它们的一个最小公倍式. 证明:

1. 对任意 $h \in K[X]$, h 是 $f_1, \cdots, f_r$ 的公倍式当且仅当 h 是 P 的倍式.
   (提示: 利用带余除法.)
2. 对任意 $Q \in K[X]$, Q 是 $f_1, \cdots, f_r$ 的最小公倍式当且仅当 Q 是 P 的非零常数倍, 即, 存在非零常数 $c \in K$ 使得 $Q = cP$. ■

证: 1. "$\Leftarrow$" $P|h$, $f_i|P \Rightarrow f_i|h$, $\forall i \in [\![1,r]\!]$.

"$\Rightarrow$" 若 P 不整除 h, 则由带余除法知: $\exists a, b \in K[X]$, s.t.

$$h = aP + b, \text{ 且 } \deg b < \deg P$$

由于 h 为公倍式, $f_i | h = aP+b \Rightarrow f_i | b$, $\forall i \in [\![1,r]\!]$

$\Rightarrow b$ 也为 f_i 的公倍式. 这与 P 的次数最小相矛盾.

故 $P|h$.

2. "$\Leftarrow$" 显然.

"$\Rightarrow$" 由定义, $\deg Q = \deg P$. 再由 1, $Q = aP$, 对某个 $a \in K[X] \Rightarrow a \in K\backslash\{0\}$.

思考题 5.24. 假设多项式 $f, g, q, r \in K[X]$ 满足 $f = gq + r$. 对任意 $d \in K[X]$ 证明:

1. d 是 f 和 g 的公因式当且仅当 d 是 g 和 r 的公因式.
2. 假设 $g \neq 0$. 则 d 是 f 和 g 的最大公因式当且仅当 d 是 g 和 r 的最大公因式. ■

1. "$\Rightarrow$" $d | f = gq + r$ 且 $d | g \Rightarrow d | r$

"$\Leftarrow$" $d | g$ & $d | r \Rightarrow d | gq + r = f$.

2. 由于 $\underbrace{\{d \in K[X] : d|f \text{ 且 } d|g\}}_{D_1 !!} = \underbrace{\{d \in K[X] : d|g \text{ 且 } d|r\}}_{D_2 !!}$

$\Rightarrow$ d 在 D_1 中次数最高 $\Leftrightarrow$ d 在 D_2 中次数最高.

习题 5.3.1. 对下列情况, 求出 f 和 g 的一个最大公因式 d 并写出一个 $d = uf + vg$ 形式的 Bézout 等式:

1. $f = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$, $g = X^3 + X^2 - X - 1$.
2. $f = X^4 + 2X^3 - X^2 - 4X - 2$, $g = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$.
3. $f = X^5 + 4X^4 + X^2 + 2X + 3$, $g = X - 2$.
4. $f = X^6 - 1$, $g = X^3 + X + 1$.

2. $f = g + X^3 - 2X$

$$g = (X+1)(X^3-2X) + X^2 - 2$$

$$X^3 - 2X = X(X^2-2)$$

$$\Rightarrow X^2 - 2 = g - (X+1)(X^3-2X) = g - (X+1)(f-g) = (X+2)g - (X+1)f = \gcd(f,g)$$

4. $f = X^3 g - X^4 - X^3 - 1 = (X^3 - X)g - X^3 + X^2 + X - 1 = (X^3 - X - 1)g + X^2 + 2X$

$$g = (X-2)(X^2+2X) + 5X + 1$$

$$X^2 + 2X = \left(\frac{1}{5}X + \frac{9}{25}\right)(5X+1) - \frac{9}{25}$$

$$\frac{9}{25} = -(X^2+2X) + \left(\frac{1}{5}X + \frac{9}{25}\right)(5X+1)$$

$$= -(X^2+2X) + \left(\frac{1}{5}X + \frac{9}{25}\right)\left[g - (X-2)(X^2+2X)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{5}X + \frac{9}{25}\right)g - \left(\frac{1}{5}X^2 - \frac{1}{25}X + \frac{7}{25}\right)(X^2+2X)$$

$$= \left(\frac{1}{5}X - \frac{9}{25}\right)g - \left(\frac{1}{5}X^2 - \frac{1}{25}X + \frac{7}{25}\right)\left(f - (X^3 - X - 1)g\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{5}X^2 - \frac{1}{25}X + \frac{7}{25}\right)f + \left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{1}{25}X^4 + \frac{2}{25}X^3 - \frac{4}{25}X^2 - \frac{1}{25}X + \frac{2}{25}\right)g$$

$$\Rightarrow 1 = \left(-\frac{5}{9}X^2 + \frac{1}{9}X - \frac{7}{9}\right)f + \left(\frac{5}{9}X^5 - \frac{1}{9}X^4 + \frac{2}{9}X^3 - \frac{4}{9}X^2 - \frac{1}{9}X + \frac{2}{9}\right)g$$

$$= \gcd(f, g)$$

习题 5.3.2. 设 $f, g \in K[X]$ 为非零多项式, $d = \gcd(f, g)$.

1. 证明: f/d 和 g/d 一定互素.
2. f/d 和 g 是否一定互素？请给出证明或反例.
3. $\gcd(f/d, g)$ 和 $\gcd(f, g/d)$ 二者是否有可能均不为 1？

证: 1. 若 $h \mid \frac{f}{d}$ 且 $h \mid \frac{g}{d}$，则 $h\cdot d \mid f$ 且 $h\cdot d \mid g$.

故 $h \in K \setminus \{0\}$. 即 $\frac{f}{d}, \frac{g}{d}$ 互素

2. $f = (x-1)^2$, $g = (x-1)$, 则 $d = x-1 = g$. 且 $g = (f/d, g)$

3. $f = (x-1)^2 x$, $g = (x-1)x^2$, 则 $d = x(x-1)$

$\gcd(\frac{f}{d}, g) = x-1$, $\gcd(f, \frac{g}{d}) = x$.

故有可能.

习题 5.3.3. 设 $f_1, \cdots, f_r \in K[X]$ 均为非零多项式, 其中 $r \geq 3$. 令 $f = \gcd(f_{r-1}, f_r)$. 对任意 $d \in K[X]$ 证明:

1. d 是 $f_1, \cdots, f_{r-2}, f_{r-1}, f_r$ 的公因式当且仅当 d 是 $f_1, \cdots, f_{r-2}, f$ 的公因式.
2. d 是 $f_1, \cdots, f_{r-2}, f_{r-1}, f_r$ 的最大公因式当且仅当 d 是 $f_1, \cdots, f_{r-2}, f$ 的最大公因式.

证: "$\Rightarrow$" $d \mid f_{r-1}$ 且 $d \mid f_r \xLeftrightarrow{\text{推 5.3.6}} d \mid \gcd(f_{r-1}, f_r) = f$

"$\Leftarrow$" 令 $D_1 := \{d \text{ 为 } f_1, \cdots, f_r \text{ 的公因式}\}$ $D_2 = \{d \text{ 为 } f_1, \cdots, f_{r-2}, f \text{ 的公因式}\}$

由 1. $D_1 = D_2$. 而最大公因式为各自集合的次数最高的因式

故等价.

习题 5.3.6. 设 $f, g \in K[X]$ 均为首一 (故而非零) 多项式. 证明: $fg = \gcd(f, g)\mathrm{lcm}(f, g)$; 特别地, f 和 g 互素当且仅当 $\mathrm{lcm}(f, g) = fg$.

令 $\gcd(f, g) = d$, $\mathrm{lcm}(f, g) = D$, 则只需证 $D = \frac{fg}{d}$.

首先, $\frac{fg}{d}$ 显然为 f 与 g 的倍式. 即 $D \mid \frac{fg}{d}$. (思考题 5.22)

设 $\frac{fg}{d} = D\cdot h$. $h \in K[X] \setminus \{0\}$. 则 $h \cdot \frac{D}{f} = \frac{g}{d}$ 且 $h \cdot \frac{D}{g} = \frac{f}{d}$.

得 $h \mid \frac{g}{d}$ & $\frac{f}{d}$. 由于 $(\frac{f}{d}, \frac{g}{d}) = 1$, $h \in K \setminus \{0\}$.

再由首项系数知 $h = 1$. 故 $D = f \cdot g / d$

高代II习题课 - HW6

甘 2025.4.6.

思考题 6.1. 对于例 6.1.4 中的第 3 个例子, 证明: 如果双线性型 $\langle \cdot , \cdot \rangle_A$ 是对称的 (斜对称的), 则矩阵 A 必然是对称的 (斜对称的). ■

证：记 $v_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$，则 $v_i^T A v_j = a_{ij}$

再由对称 (斜对称) 得 $a_{ij} = a_{ji}$ ($a_{ij} = -a_{ji}$)

思考题 6.3. 设 V 是有限维向量空间, $\varphi \in \mathrm{Bil}(V)$.

1. 证明下列陈述等价:
   (i) φ 是对称的.
   (ii) 存在 V 的一组有序基 $\mathcal{B}$, 使得 Gram 矩阵 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ 是对称阵.
   (iii) 对于 V 的任意一组有序基 $\mathcal{B}$, Gram 矩阵 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ 是对称阵.
2. 对于斜对称的双线性型, 叙述并证明和前一个问题类似的结论. ■

1. (i) ⇒ (iii) 令 $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$，$n = \dim V$.

$$(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi))_{ij} = \varphi(v_i, v_j) = \varphi(v_j, v_i) = (\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi))_{ji}$$

故 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ 为对称阵.

(iii) ⇒ (ii) 显然.

(ii) ⇒ (i) 令 $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$. $n = \dim V$.

$\forall v, w \in V$，$\exists a_i, b_i \in K$，$i = 1, \cdots, n$，s.t. $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$，$w = \sum_{i=1}^n b_i v_i$

则 $\varphi(v, w) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \varphi(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \varphi(v_j, v_i)$

$$= \varphi\left(\sum b_j v_j, \sum a_i v_i\right) = \varphi(w, v)$$

故 φ 对称.

思考题 6.7. 记号如 (6.1.22) 一段, 证明:

1. (6.1.22.1) 和 (6.1.22.2) 中的映射都是线性映射.
2. $\mathrm{Ker}(\hat{\varphi}) = \mathrm{Rad}_1(\varphi)$, $\mathrm{Ker}(\hat{\varphi}') = \mathrm{Rad}_2(\varphi)$.
   因此, φ 是左非退化的当且仅当 $\hat{\varphi}$ 是单射, φ 是右非退化的当且仅当 $\hat{\varphi}'$ 是单射. ■

证：1. $\hat{\varphi}: V \to V^\circ;\ u \mapsto (\varphi_u: v \mapsto \varphi(u,v))$

$\hat{\varphi}': V \to V^\circ;\ w \mapsto (\varphi'_w: v \mapsto \varphi(v,w))$

保加法，数乘

2. $\forall u \in V$,

$u \in \operatorname{Ker}\hat{\varphi} \Leftrightarrow \hat{\varphi}(u) = \varphi_u = 0 \Leftrightarrow \forall v \in V,\ \varphi_u(v) = \varphi(u,v) = 0$

$\Leftrightarrow u \in \operatorname{Rad}_1(\varphi)$

$\forall w \in V$

$w \in \operatorname{Ker}\hat{\varphi}' \Leftrightarrow \hat{\varphi}'(w) = \varphi'_w = 0 \Leftrightarrow \forall v \in V,\ \varphi'_w(v) = \varphi(v,w) = 0$

$\Leftrightarrow w \in \operatorname{Rad}_2(\varphi)$

习题 6.1.2. 设 $V = \mathbf{M}_n(K)$. 定义

$$\varphi: V \times V \longrightarrow K; \quad (A, B) \longmapsto \operatorname{Tr}(AB).$$

1. 证明 φ 是 V 上的对称双线性型.
2. 令 $n = 2$, 取 V 的一组有序基 $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ 如下:
$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
求 φ 在 $\mathcal{B}$ 下的 Gram 矩阵 $A_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
3. 仍设 $n = 2$. 另取 V 的一组有序基 $\mathcal{C} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ 为
$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
求 φ 在 $\mathcal{C}$ 下的 Gram 矩阵 $A_2 = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi)$.
4. 对于前两个小题中的矩阵 A_1 和 A_2, 找出一个可逆矩阵 $P \in \mathbf{M}_4(K)$ 使得 $P^T A_1 P = A_2$.

证：1. 双线性：$\forall v_1, v_2, w \in V,\ c \in K$.

$\varphi(v_1+v_2, w) = \operatorname{Tr}((v_1+v_2)w) = \operatorname{Tr}(v_1 w) + \operatorname{Tr}(v_2 w) = \varphi(v_1, w) + \varphi(v_2, w)$

$\varphi(w, v_1+v_2) = \cdots = \varphi(w, v_1) + \varphi(w, v_2)$

$\varphi(cv_1, v_2) = \operatorname{Tr}(cv_1 v_2) = c\operatorname{Tr}(v_1 v_2) = c\varphi(v_1, v_2)$

$\varphi(v_1, cv_2) = \cdots = c\varphi(v_1, v_2)$

对称：$\forall v_1, v_2 \in V$, $\varphi(v_1, v_2) = \operatorname{Tr}(v_1 v_2) = \operatorname{Tr}(v_2 v_1) = \varphi(v_2, v_1)$

2. $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = 1$, $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$, $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = 0$, $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_4) = 0$.

$\varphi(\varepsilon_2, \varepsilon_2) = 0$, $\varphi(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = 1$, $\varphi(\varepsilon_2, \varepsilon_4) = 0$

$$\varphi(\varepsilon_3,\varepsilon_3)=0,\quad \varphi(\varepsilon_3,\varepsilon_4)=0$$
$$\varphi(\varepsilon_4,\varepsilon_4)=1.$$

因此 $A_1=\mathcal{M}_B(\varphi)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

3. $\varphi(\eta_1,\eta_1)=2,\quad \varphi(\eta_1,\eta_2)=0,\quad \varphi(\eta_1,\eta_3)=0,\quad \varphi(\eta_1,\eta_4)=0$

$\varphi(\eta_2,\eta_2)=2,\quad \varphi(\eta_2,\eta_3)=0,\quad \varphi(\eta_2,\eta_4)=0$

$\varphi(\eta_3,\eta_3)=2,\quad \varphi(\eta_3,\eta_4)=0$

$\varphi(\eta_4,\eta_4)=-2$

$A_2=\mathcal{M}_e(\varphi)=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$

4. $\eta_1=\varepsilon_1+\varepsilon_4,\ \eta_2=\varepsilon_1-\varepsilon_4,\ \eta_3=\varepsilon_2+\varepsilon_3,\ \eta_4=\varepsilon_2-\varepsilon_3$

即 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=e=B\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\end{pmatrix}$, 令 $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\end{pmatrix}=:P$.

$\forall X,Y\in K^{4\times1}$, $\varphi(eX,eY)=X^T\mathcal{M}_e(\varphi)Y=X^TA_2Y$

同时, $\varphi(eX,eY)=\varphi(BPX,BPY)=X^TP^TA_1PY$.

由思考题 6.3, $A_2=P^TA_1P$

习题 6.1.3. 考虑分块对角阵 $A=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&A_3&\\&&&A_4\end{pmatrix}$, 其中 A_i 是大小相同的方阵. 令 $A'=\begin{pmatrix}A_4&&&\\&A_3&&\\&&A_1&\\&&&A_2\end{pmatrix}$. 证明 A 与 A' 相合.

令 A_i 为 $n\times n$ 方阵.

$$A'=\begin{pmatrix}&&I_n&\\&I_n&&\\I_n&&&\\&&&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_3&&\\&&A_4&\\&&&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&&I_n&\\&I_n&&\\I_n&&&\\&&&I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&&I_n&\\&I_n&&\\I_n&&&\\&&&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n&&&\\&&&I_n\\&&I_n&\\&I_n&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&A_4&\\&&&A_3\end{pmatrix}\cdots$$

$$=\begin{pmatrix}&&I_n&\\&I_n&&\\I_n&&&\\&&&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n&&&\\&&&I_n\\&&I_n&\\&I_n&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n&&&\\&I_n&&\\&&&I_n\\&&I_n&\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}I_n&&&\\&I_n&&\\&&&I_n\\&&I_n&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n&&&\\&&&I_n\\&&I_n&\\&I_n&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&&I_n&\\&I_n&&\\I_n&&&\\&&&I_n\end{pmatrix}$$

习题 6.1.4. 在列向量空间 K^4 上定义双线性型 φ 如下：对于 $x=(x_1,\cdots,x_4)^T$, $y=(y_1,\cdots,y_4)^T$，令

$$\varphi(x,\,y) := -x_1y_3 + x_1y_4 + x_3y_1 + x_3y_4 - x_4y_1 - x_4y_3\,.$$

请判断：φ 是否是对称的？φ 是否是满秩的？

$$\varphi(y,x) = -y_1x_3 + y_1x_4 + y_3x_1 + y_3x_4 - y_4x_1 - y_4x_3$$

$$= x_1y_3 - x_1y_4 - x_3y_1 - x_3y_4 + x_4y_1 + x_4y_3 = -\varphi(x,y)$$

故 φ 为反对称，不对称。

$\varphi(x_2,y)=0$ 故不满秩。

习题 6.1.5. (本题有一定的技巧性.)

设 $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ 是 K-向量空间 V 上的双线性型. 假设对于任意 $u,\,v\in V$, $\langle u,\,v\rangle=0$ 成立时 $\langle v,\,u\rangle=0$ 也成立. 证明:

1. 对任意 $x,\,y,\,z\in V$ 均有 $\langle x,\,y\rangle\langle z,\,x\rangle-\langle x,\,z\rangle\langle y,\,x\rangle=0$.
2. 对任意 $x,\,y\in V$ 均有 $\langle x,\,x\rangle\big(\langle x,\,y\rangle-\langle y,\,x\rangle\big)=0$.
3. 假设有向量 $u,\,v,\,w\in V$ 满足

$$\langle u,\,v\rangle\neq\langle v,\,u\rangle \quad \text{但} \quad \langle u,\,w\rangle=\langle w,\,u\rangle,\ \langle v,\,w\rangle=\langle w,\,v\rangle.$$

则

$$\langle u,\,w\rangle=\langle v,\,w\rangle=0,\ \langle u,\,u\rangle=\langle u+w,\,u+w\rangle=\langle w,\,w\rangle=0.$$

4. 作为双线性型 $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ 要么是对称的要么交错的.

$\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle$

1. 如果 $\langle x,y\rangle$ 或 $\langle x,z\rangle$ 其中一个为零，等式显然成立。

假设均非零，即证 $\dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,x\rangle}=\dfrac{\langle x,z\rangle}{\langle z,x\rangle}$，即证 $\left\langle x,\ \dfrac{y}{\langle y,x\rangle}-\dfrac{z}{\langle z,x\rangle}\right\rangle=0$

由于 $\left\langle \dfrac{y}{\langle y,x\rangle}-\dfrac{z}{\langle z,x\rangle},\ x\right\rangle=\dfrac{\langle y,x\rangle}{\langle y,x\rangle}-\dfrac{\langle z,x\rangle}{\langle z,x\rangle}=0$，故上式成立

2. 令1中等式中 $z=x$，即得。

3. 令1中等式 $x=u,\ y=v,\ z=w$，有 $\langle u,v\rangle\langle w,u\rangle-\langle u,w\rangle\langle v,u\rangle=0$

即 $\langle u,w\rangle(\langle u,v\rangle-\langle v,u\rangle)=0$. 由题，后一项非零。故 $\langle u,w\rangle=0$.

相似地，$\langle v,w\rangle=0$.

由2，$\langle u,u\rangle(\langle u,v\rangle-\langle v,u\rangle)=0$，又 $\langle u,v\rangle\neq\langle v,u\rangle$，$\langle u,u\rangle=0$.

相似地，$\langle u+w,\,u+w\rangle(\langle u+w,\,v\rangle-\langle v,\,u+w\rangle)=\langle u+w,u+w\rangle(\langle u,v\rangle-\langle v,u\rangle)=0$

4. 假设 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 不交换，则 $\exists u, v\in V$, s.t. $\langle u,v\rangle \neq \langle v,u\rangle$.

由3知，令 $w=0\in V$，则有 $\langle u,u\rangle = \langle v,v\rangle = 0$.

$\forall x\in V$，若 $\langle x,u\rangle \neq \langle u,x\rangle$，则由上述讨论 $\langle x,x\rangle = 0$.

若 $\langle x,v\rangle \neq \langle v,x\rangle$，亦有 $\langle x,x\rangle = 0$

若 $\langle x,u\rangle = \langle u,x\rangle$ 且 $\langle x,v\rangle = \langle v,x\rangle$，则由3，令 $w=x$，$\langle x,x\rangle = 0$.

故 $\forall x\in V$，$\langle x,x\rangle = 0$，即 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 交错.

习题 6.1.6. 举例说明: 一个双线性型的左根和右根可以不相等.

令 $V=K^2$，φ 为矩阵 $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ 在标准基下的双线性型.

注意到 $\varphi_{e_1-e_2}(ae_1+be_2) = a-a=0$，$\forall a,b\in K$. 且 $\varphi_{e_1}(e_1)=1\neq 0$.

故 $\mathrm{Rad}_1(\varphi) = \mathrm{span}\{e_1-e_2\}$.

注意到 $\varphi'_{e_2}(ae_1+be_2) = 0+0=0$，$\forall a,b\in K$. 且 $e_2\notin \mathrm{Rad}_1(\varphi)$

故 $\mathrm{Rad}_2(\varphi)\neq \mathrm{Rad}_1(\varphi)$

习题 6.1.7. 设 $A\in \mathbf{M}_n(K)$. 证明:

1. A 是斜对称阵当且仅当对任意列向量 $x\in K^n$ 均有 $x^TAx=0$.
2. 若 A 是对称阵, 且对于任意 $x\in K^n$ 均有 $x^TAx=0$, 则 $A=0$.

证. 由命题 6.1.3，即得.

习题 6.1.9. 设 φ 是 K-向量空间 V 上的对称或交错双线性型, U, W 是 V 的子空间.

1. 证明: 如果 $V=U+W$ 并且 U 和 W 关于 φ 正交, 那么 $\mathrm{Rad}(\varphi)=\mathrm{Rad}(\varphi|_U)+\mathrm{Rad}(\varphi|_W)$.
2. 假设 $V=U+U^\perp$. 证明: φ 是非退化的当且仅当 $\varphi|_U$ 和 $\varphi|_{U^\perp}$ 都是非退化的.

证: 1. $\forall u\in \mathrm{Rad}(\varphi|_U)$，$w\in \mathrm{Rad}(\varphi|_W)$，$v\in V$. $\exists v_1\in U, v_2\in W$ s.t. $v=v_1+v_2$

$\varphi(u+w, v) = \varphi(u, v_1+v_2) + \varphi(w, v_1+v_2) = 0$

故 $\mathrm{Rad}(\varphi|_U) + \mathrm{Rad}(\varphi|_W) \subseteq \mathrm{Rad}(\varphi)$

反过来，$\forall \hat{v}\in \mathrm{Rad}\,\varphi\subseteq V$，$\exists \hat{u}\in U, \hat{w}\in W$ s.t. $\hat{v}=\hat{u}+\hat{w}$.

$\forall u\in U$，$w\in W$，$\varphi(\hat{u},u) = \varphi(\hat{u}+\hat{w}, u) = 0 \Rightarrow \hat{u}\in \mathrm{Rad}(\varphi|_U)$

$\varphi(\hat{w},w) = \varphi(\hat{w}+\hat{u}, w) = 0 \Rightarrow \hat{w}\in \mathrm{Rad}(\varphi|_W)$

故 $\mathrm{Rad}(\varphi) \supseteq \mathrm{Rad}(\varphi|_U) + \mathrm{Rad}(\varphi|_W)$

证毕.

2. 由 1, $\mathrm{Rad}(\varphi) = \phi$ iff $\mathrm{Rad}(\varphi|_U)$ & $\mathrm{Rad}(\varphi|_W) = \phi$.

高代II习题课 - HW 7

2025.4.14

思考题 6.8. 设 φ 是向量空间 V 上的对称或交错双线性型. 如果一个非零向量 $v \in V$ 满足 $\varphi(v, v) = 0$, 则称 v 是 φ 的一个**迷向**向量. 如果这样的向量存在, 我们说 φ 是**迷向的**, 否则称 φ 是**非迷向的**.

1. 举出一个迷向的对称双线性型的例子和一个非迷向的对称双线性型的例子.
2. 证明: 如果 φ 是非迷向的, 那么对于任意子空间 $W \subseteq V$, $\varphi|_W$ 是非退化的. 特别地, φ 在非迷向时一定非退化.
3. 证明: 如果 φ 是迷向的, 则 (无论 φ 是否退化) 一定存在子空间 $W \subseteq V$ 使 $\varphi|_W$ 是退化的. ■

1. $\varphi: K\times K \to K$; $(x,y) \mapsto 0$

   $\varphi: K\times K \to K$; $(x,y) \mapsto xy$
2. 反设 $\exists W \subset V$, $\varphi|_W$ 非退化. 则 $\exists v \in W \subset V$ s.t. $\varphi|_W(v,v) = \varphi(v,v) = 0$ 矛盾.
3. 取包含迷向向量 v 的一个子空间即可

习题 6.1.8. 设 $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ 是 n 维 K-向量空间 V 上的非退化双线性型, $(v_1, \cdots, v_n)$ 是 V 的一组有序基.

1. 证明: 对任意 $k \in [\![1, n]\!]$ 及任意 $a_1, \cdots, a_k \in K$, 一定存在向量 $w \in V$ 使得
$$\text{对每个 } i \in [\![1, k]\!] \text{ 均有 } \langle v_i\,, w \rangle = a_i\,.$$
2. 证明: 若 $k = n$, 则上一小题中的向量 w 是唯一的, 而且只要 $a_1, \cdots, a_n$ 不全为零, 必有 $w \neq 0$.

证: 1. $\langle , \rangle$ 非退化, $\varphi': V \to V^\vee$ 为双射, 考虑 $v_i^\vee$ 的原象 w_i.

则 $w = \sum_{i=1}^{k} a_i w_i$ 满足条件.

2. 若有 w' 亦满足, 则 $\varphi'(w') = \varphi'(w) \Rightarrow w' = w$

由 $v_i^\vee$ 为 $V^\vee$ 的一组基, w_i 为 V 的一组基, 故 $w \neq 0$ 如果 a_i 不全为 0.

习题 6.1.10. 设 φ 是由如下表达式给出的 K^4 上的双线性型:

$$\varphi(u, v) = -x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 3x_2y_2 + x_2y_4 - 2x_1y_4 + x_4y_2 - 2x_4y_1 + 2x_4y_4\,,$$

其中 $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, $v = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$. 令 $W = \mathrm{span}(e_1, e_2) \subseteq K^4$.

1. 求 $W^\perp$.
2. 证明 $\varphi|_W$ 是非退化的.
3. 将 $v = (1, 2, 3, 4)^T$ 分解为 $v = w + w'$ 的形式, 其中 $w \in W$, $w' \in W^\perp$.

易知 φ 对称.

1. 设 $v = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T \in W^\perp$, 则 $\varphi(e_1, v) = -y_1 + 2y_2 - 2y_4 = 0$ & $\varphi(e_2, v) = 2y_1 - 3y_2 + y_4 = 0$

$\Rightarrow W^\perp = \mathrm{span}\{4e_1 + 3e_2 + e_4, e_3\}$

2. $\varphi|_W(x, v) = -x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 3x_2y_2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ 满秩.

3. $v = 3e_3 + 4(4e_1 + 3e_2 + e_4) - 15e_1 - 10e_2$

思考题 6.10. 记号如 (6.2.2) 一段, 对于任意 $\varphi \in \mathrm{Bil}(V)$, 令 φ^T 表示它的转置 (参见思考题 6.2 (2)), 即 $\varphi^T(u, v) = \varphi(v, u)$. 定义映射

$$\sigma : \mathrm{Bil}(V) \longrightarrow \mathrm{Sym}(V)\,; \quad \varphi \longmapsto \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^T)\,.$$

证明:

1. 复合映射 $\sigma \circ \iota$ 等于集合 $\mathrm{Sym}(V)$ 上的恒等映射, 其中 $\iota : \mathrm{Sym}(V) \hookrightarrow \mathrm{Bil}(V)$ 为自然含入映射.
2. 下面的图表是交换的:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Bil}(V) \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\widetilde{Q}"'] & & \mathrm{Sym}(V) \\ & \mathrm{Quad}(V) \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$$

其中 B 和 $\widetilde{Q}$ 的定义如 (6.2.2.1) 和 (6.2.2.3). ■

1. $\forall \varphi \in \mathrm{Sym}(V)$, $\quad \sigma \circ \iota(\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^T) = \varphi \Rightarrow \sigma \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathrm{Sym}(V)}$

2. $\forall \varphi \in \mathrm{Bil}(V)$,

$$\begin{aligned} B \circ \widehat{Q}(\varphi)(u, v) &= B(q_\varphi)(u, v) = b_{q_\varphi}(u, v) \\ &= \frac{1}{2}(q_\varphi(u+v) - q_\varphi(u) - q_\varphi(v)) \\ &= \frac{1}{2}(\varphi(u+v, u+v) - \varphi(u, u) - \varphi(v, v)) \\ &= \varphi(u, v) \end{aligned}$$

习题 6.2.1. 设 q 为 K-向量空间 V 上的二次型, $\varphi = b_q$ 是它的极化型. 证明以下恒等式 (通常称为**极化恒等式**):

$$\text{对任意 } u, v \in V\,, \quad \varphi(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u-v)}{4}\,.$$

证:

$$b_q(u, v) = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v))$$

$$b_q(u, -v) = \frac{1}{2}(q(u-v) - q(u) - q(v)) = -b_q(u, v)$$

$$\Rightarrow \varphi(u, v) = \frac{b_q(u, v) - b_q(u, -v)}{2} = \underline{\frac{q(u+v) - q(u-v)}{4}}$$

习题 6.2.2. 对于下列二次型 $q \in \mathrm{Quad}(K^4)$, 求出 q 在 K^4 的标准基下的 Gram 矩阵以及极化型 b_q 的表达式:

(1) $q = -x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_3^2 - 5x_3x_4$;

(2) $q = -x_2^2 - x_3^2 - x_1x_4$;

(3) $q = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

2. $\frac{1}{2}(q(u+v)-q(u)-q(v))=\frac{1}{2}[(x_2+y_2)^2-(x_3+y_3)^2-(x_1+y_1)(x_4+y_4)+x_2^2+x_3^2+x_1x_4+y_2^2+y_3^2+y_1y_4]$

$= -x_2y_2-x_3y_3-\frac{1}{2}x_1y_4-\frac{1}{2}y_1x_4$

$b_q: K^4\times K^4\to K\ ;\ (u,v)\longmapsto -x_2y_2-x_3y_3-\frac{1}{2}x_1y_4-\frac{1}{2}y_1x_4$

Gram矩阵: $A=\begin{pmatrix} 0 & & & -\frac{1}{2} \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ -\frac{1}{2} & & & \end{pmatrix}$

3. $\frac{1}{2}(q(u+v)-q(u)-q(v))=[(x_1+y_1)(x_2+y_2)+(x_1+y_1)(x_3+y_3)+(x_1+y_1)(x_4+y_4)+(x_2+y_2)(x_3+y_3)$

$+(x_2+y_2)(x_4+y_4)+(x_3+y_3)(x_4+y_4)-x_1x_2-x_1x_3-x_1x_4-x_2x_4-x_3x_4$

$-x_2x_3-y_1y_2-y_1y_3-y_1y_4-y_2y_3-y_2y_4-y_3y_4]\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}(x_1y_2+y_2x_1+x_1y_3+x_3y_1+x_1y_4+x_4y_1+x_2y_3+x_3y_2+x_2y_4+x_4y_2$

$+x_3y_4+x_4y_3)$

$b_q: K^4\times K^4\to K\ ;\ (u,v)\mapsto \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}x_iy_j$, Gram矩阵: $A=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \end{pmatrix}$

习题 6.2.3. 找出适当的可逆线性变量替换将下列二次型化为标准形:

(1) $q=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

(2) $q=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$;

(3) $q=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$;

(4) $q=8x_1x_4+2x_3x_4+2x_2x_3+8x_2x_4$.

(2) $\begin{cases} y_1=x_1+x_2 \\ y_2=x_2+2x_3 \\ y_3=x_3 \\ y_4=x_4 \end{cases} \Rightarrow q=y_1^2+y_2^2$

(4) $\begin{cases} x_1=x_1'-x_4' \\ x_2=x_2' \\ x_3=x_3' \\ x_4=x_1'+x_4' \end{cases} \Rightarrow q=8x_1'^2-8x_4'^2+2x_1'x_3'+2x_3'x_4'+2x_2'x_3'+8x_1'x_2'+8x_2'x_4'$

$=8(x_1'+\frac{x_2'}{2}+\frac{x_3'}{8})^2-2x_2'^2-\frac{x_3'^2}{8}+3x_2'x_3'-2x_3'x_4'+8x_2'x_4'$

$=8(x_1'+\frac{x_2'}{2}+\frac{x_3'}{8})^2-2(x_2'-\frac{3}{4}x_3'-2x_4')^2+x_3'^2+8x_4'^2+4x_3'x_4'$

$=8(x_1'+\frac{x_2'}{2}+\frac{x_3'}{8})^2-2(x_2'-\frac{3}{4}x_3'-2x_4')^2+(x_3'+2x_4)^2+4x_4'^2$

令 $\begin{cases} y_1 = 2\sqrt{2}x_1' + \sqrt{2}x_2' + \dfrac{x_3'}{2\sqrt{2}} \\ y_2 = \sqrt{2}x_2' - \dfrac{3\sqrt{2}}{4}x_3' - 2\sqrt{2}x_4' \\ y_3 = x_3' + 2x_4' \\ y_4 = 2x_4' \end{cases}$，则 $q = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$

习题 6.2.6. 证明: 秩等于 r 的对称矩阵可以写成 r 个秩为 1 的对称矩阵之和.

证：任意对称 A，存在可逆阵 P s.t. $A = P^TDP$，D 为对角。则 $\operatorname{rank} D = r$，

$D = D_1 + \cdots + D_r$，其中 D_i 有仅有一个对角线上非零元。即 $\operatorname{rank} D_i = 1$.

则 $A = \sum\limits_{i=1}^{r} P^TD_iP$，$P^TD_iP$ 为秩为1的对称阵.

习题 6.2.7. 设 $A = (a_{ij})$ 为 $s \times n$ 实矩阵. 考虑实二次型

$$q = \sum_{i=1}^{s} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)^2 .$$

证明 $\operatorname{rank}(q) = \operatorname{rank}(A)$.

证：$q = X^TA^TAX$. 故等价于证 $\operatorname{rank} A^TA = \operatorname{rank} A$.

只证：$N(A^TA) = N(A)$ （高代I：$N(M) = Sol(M;0)$ ）

"$\supseteq$"：显然、，"$\subseteq$"：$\forall X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ s.t. $A^TAX = 0$. $\Rightarrow X^TA^TAX = |AX| = 0$

由 $AX \in \mathbb{R}^{n\times 1}$，$AX = 0$.

习题 6.2.8. 找出 $\mathbb{C}$ 上适当的可逆线性变量替换将下列二次型化为复规范形:

(1) $q = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$;

(2) $q = (-1-\mathrm{i})x_1x_2 + 2\mathrm{i}x_2^2$;

(3) $q = (1+\mathrm{i})x_1^2 - (\sqrt{2}+2\mathrm{i})x_2^2 - 3\mathrm{i}x_3^2$.

(2) $q = (\sqrt{2i}\,x_2)^2 - (1+i)x_1x_2 + \left(\dfrac{1+i}{2\sqrt{2i}}x_1\right)^2 + \left(\dfrac{1+i}{2\sqrt{2i}}\cdot i\,x_1\right)^2$

$= \left(\sqrt{2i}\,x_2 - \dfrac{1+i}{2\sqrt{2i}}x_1\right)^2 + \left(\dfrac{1+i}{2\sqrt{2i}}x_1\right)^2$

$= \left((1+i)x_2 - \dfrac{1}{2}x_1\right)^2 + \left(\dfrac{x_1}{2}\right)^2$

故取 $y_1 = (1+i)x_2 - \frac{1}{2}x_1$，$y_2 = \dfrac{x_1}{2}$，则 $q = y_1^2 + y_2^2$

高代II习题课 - HW8

甘 2025.4.14.

思考题 6.15. 设 $A=(a_{ij})\in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 是正定矩阵. 令 $M=\max_{1\le i,j\le n}\{|a_{ij}|\}$ 为矩阵 A 中元素绝对值的最大值.

证明: 对任意两个不同的指标 $k,l\in[\![1,n]\!]$, 必有 $|a_{kl}|<M$. (也就是说, 只有 A 的对角线上元素才可能达到绝对值的最大值.) ■

证: 反设存在 $k,l\in[\![1,n]\!]$, $k<l$ s.t. $|a_{kl}|\geq M$.

则考虑主子式 $A\begin{Bmatrix} k & l \\ k & l\end{Bmatrix}=\begin{vmatrix} a_{kk} & a_{kl} \\ a_{lk} & a_{ll}\end{vmatrix}=a_{kk}a_{ll}-(a_{kl})^2\leq 0$ 矛盾!

思考题 6.17. 举例说明: 存在一个上三角矩阵 $A\in\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, 它的对角线元素都是正数 (因此 A 的所有主子式都是正的), 但二次型 $q=\langle A\rangle:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\alpha\mapsto\alpha^TA\alpha$ 可以在某些 $\alpha\in\mathbb{R}^2$ 处取到负值. ■

$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ & 1\end{pmatrix}$, $\quad q(1,1)=(1\ \ 1)A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=-2$

习题 6.2.4. 找出适当的可逆线性变量替换将下列二次型化为标准形:

$$(1)\quad q=x_1x_{2n}+x_2x_{2n-1}+\cdots+x_nx_{n+1};$$

令 $x_i=y_i-y_{2n+1-i}$, $x_{2n+1-i}=y_i+y_{2n+1-i}$, $\forall i\in[\![1,n]\!]$

则 $q=\sum_{i=1}^n y_i^2-\sum_{i=1}^n y_{2n+1-i}^2$

习题 6.2.5. 找出适当的可逆线性变量替换将下列二次型化为标准形:

$$(1)\quad q=\sum_{i=1}^n x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j;$$

$$(2)\quad q=\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2,\quad \text{其中 } \bar{x}:=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

(2) 较复杂, 见文末.

习题 6.2.10. 设 q 为有限维实向量空间 V 上的二次型. 假设存在向量 $v_1,v_2\in V$ 使得 $q(v_1)<0<q(v_2)$. 证明:

1. 一定存在非零向量 v_0 使得 $q(v_0)=0$.
   这样的向量 v_0 称为 q 的一个**迷向向量** (参见思考题 6.8).
2. 存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 使得其中每个 ε_i 均为 q 的迷向向量.

证: 1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $t\mapsto q(tv_2+(1-t)v_1)$ 为多项式函数 故连续.

$f(0)=q(v_1)<0<q(v_2)=f(1)$. 故 $\exists\,\tilde{t}\in(0,1)$ s.t. $f(\tilde{t})=0$.

又 v_1,v_2 不线性相关, 故 $\tilde{t}v_2+(1-\tilde{t})v_1$ 非零.

法I. 分析方法

情况II. 此时存在一组基 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 使得实二次型 q 对应标准型为 $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

故 $q(\varepsilon_1+\varepsilon_{p+1})=0$. $p,q\neq 0$,

2. 由情况II, 考虑向量组

$$\begin{matrix} \varepsilon_1\pm\varepsilon_{p+1}, & \varepsilon_1\pm\varepsilon_{p+2}, & \cdots, & \varepsilon_1\pm\varepsilon_{p+q} \\ \varepsilon_2\pm\varepsilon_{p+1}, & \varepsilon_2\pm\varepsilon_{p+2}, & \cdots, & \varepsilon_2\pm\varepsilon_{p+q} \\ \cdots & & & \cdots \\ \varepsilon_p\pm\varepsilon_{p+1}, & \varepsilon_p\pm\varepsilon_{p+2}, & \cdots, & \varepsilon_p\pm\varepsilon_{p+q} \\ \varepsilon_{p+q+1}, & \cdots, & \varepsilon_n & \end{matrix}$$

上述向量均迷向, 且能与基 ε 相互线性表出.
故可取其中一组极大线性无关组为基.

习题 6.2.11. 设 q 是 n 维实向量空间 V 上的二次型. 定义 $C(q) := \{v \in V \mid q(v) = 0\}$.

1. 证明: $C(q)$ 是 V 的子空间当且仅当 q 是半正定或半负定的.
2. 假设 $C(q)$ 是个子空间. 求它的维数.
3. 对于一般的情况, 设 q 的秩为 r, 正、负惯性指数分别为 p, s.
   证明 $C(q)$ 中能够包含的子空间维数最大值是 $n - \max\{p, s\} = \min\{p, s\} + n - r$.

证: 1. "$\Rightarrow$" 若 $\exists v_1, v_2 \in V$ 使 $q(v_1)<0<q(v_2)$. 则由习题6.2.10得:

$\exists$ 一组 $C(q)$ 中的向量为 V 的一组基.

由 $C(q)$ 为子空间, 则 $C(q)=V$. 于是 $q=0$, 矛盾!

"$\Leftarrow$" 令 q 在一组基 $v_1,\cdots,v_n$ 下的 Gram 矩阵为 $A=\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$ (或 $\begin{pmatrix} -I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$)

则 $\forall X\in\mathbb{R}^{n\times 1}$, $\exists X_1\in\mathbb{R}^{r\times 1}$, $X_2\in\mathbb{R}^{(n-r)\times 1}$ s.t. $X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2\end{pmatrix}$.

$$X^TAX = \begin{pmatrix} X_1^TX_1 & \\ & 0\end{pmatrix}=0 \text{ (或 } \begin{pmatrix} -X_1^TX_1 & \\ & 0\end{pmatrix}=0) \Longleftrightarrow X_1=0$$

故 $C(q)=\left\{(v_1,\cdots,v_n)\begin{pmatrix} 0 \\ X_2\end{pmatrix} : X_2\in\mathbb{R}^{(n-r)\times 1}\right\}$ 是一个子空间.

2. 由1, $\dim C(q) = n-r$

3. 假设 U 为 $C(q)$ 中维数 $> n-\max\{p,s\}$ 的子空间.

令 W 为一个维数为 $\max\{p,s\}$ 的正定或负定的子空间, (一定存在, 取标准型下的一组基的子向量组即可)

由于 $\dim U+\dim W>n$, 则 $U\cap W\neq\emptyset$ 矛盾!

习题 6.2.12. 设 $1 \le p \le r$ 为正整数, 对每个 $i \in [\![1, r]\!]$, 假设 L_i 是一个以 $X_1, \cdots, X_n$ 为变元的实系数一次齐次多项式. 令 $q = L_1^2 + \cdots + L_p^2 - L_{p+1}^2 - \cdots - L_r^2$.

证明: 实二次型 q 的正惯性指数 $\le p$, 负惯性指数 $\le r - p$.

1. 令 $L_i = A_i X$，其中 $A_i \in \mathbb{R}^{1\times n}$，令 $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_r \end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_r \end{pmatrix} = AX$

$$q = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ L_r \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_{r-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ L_r \end{pmatrix} = X^T \underbrace{A^T \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_{r-p} \end{pmatrix} A}_{\text{记为}B} X$$

令 $B_1 = A^T\begin{pmatrix} I_p & \\ & 0 \end{pmatrix}A$, $B_2 = A^T\begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{r-p} \end{pmatrix}A$. 则 B_1, B_2 半正定.

令 q 的正惯性指数为 s, 负惯性指数为 t. $\mathcal{B}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; X \to BX$

$\mathcal{B}$ 的特征值为正的特征空间直和为 V_+, 即 $V_+ := \bigoplus_{\lambda>0} E(\lambda, \mathcal{B})$

同理考虑 $\mathcal{B}_1: X \mapsto B_1 X$, $V_+^1 := \bigoplus_{\lambda>0} E(\lambda, \mathcal{B}_1)$.

则 $s = \dim V_+$. 类似有 $t = \dim V_-$.

任取 $\xi \in V_+$ 向, 有 $\xi^T Q \xi > 0$. 故 $\xi^T Q_1 \xi = \xi^T Q \xi + \xi^T Q_2 \xi > 0$.

即 $V_+ \subseteq V_+^1$

而 $\operatorname{rank} Q_1 \le p$ 故 $s = \dim V_+ \le \dim V_+^1 \le p$.

同理可证 $t \le r-p$.

习题 6.2.15. 假设 q_1, q_2 是 $\mathbb{R}^n$ 上的两个二次型.

1. 证明: 如果 q_1, q_2 的正惯性指数都小于 $n/2$, 则 $q_1 + q_2$ 不可能是正定的.
2. 举例说明: 即使 q_1, q_2 都不是正定的, $q_1 + q_2$ 仍有可能是正定的.

证: 1. 令 q_i 的正惯性指数为 r_i, b_{q_i} 的 Gram 矩阵为 Q_i, $\hat{Q}_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; X \to Q_i X$.

令 $V_i^* = \bigoplus_{\lambda\le 0} E(\lambda, \hat{Q}_i)$. 则 $\dim V_i^* = n - r_i > n/2$

故 $\dim V_1^* + \dim V_2^* > n$, 因此 $V_1^* \cap V_2^* \ne \phi$.

$\forall v \in V_1^* \cap V_2^*$, $(q_1+q_2)(v) \le 0$

2. 取 V 的一组基 ε, 令 q_1, q_2 在 ε 下的 Gram 矩阵为 $Q_1 = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$

则 $q_1 + q_2$ 对应 Gram 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 正定.

习题 6.2.20. 设 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 为对称矩阵. 证明: 存在正实数 c 使得 $|x^T A x| \le c x^T x$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 均成立.

即证, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ 对称, $\exists c \in \mathbb{R}^+$ s.t. $x^T(cI \pm A)x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

即证 $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ 对称, $\exists c \in \mathbb{R}^+$ st. $cI \pm A$ 正定.

由于 $cI \pm A$ 对称, 故 $cI \pm A$ 正定当且仅当所有特征值为正.

故取 $c > \max\{|\lambda| : \lambda$ 为 A 之特征值$\}$ 即可.

习题 6.2.5. 找出适当的可逆线性变量替换将下列二次型化为标准形:

$$(1) \quad q = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j;$$

$$(2) \quad q = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2, \quad \text{其中 } \bar{x} := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

解: (2) 令 $y_1 = x_1 - \bar{x}$, $y_2 = x_2 - \bar{x}$, $\cdots$, $y_{n-1} = x_{n-1} - \bar{x}$, $y_n = -\bar{x}$

则 $(x_n - \bar{x})^2 = (n\bar{x} - x_1 \cdots - x_{n-1} - \bar{x})^2 = (y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})^2$

故 $q_n = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + (y_1 + \cdots + y_{n-1})^2 = 2y_1^2 + 2y_2^2 + \cdots + 2y_{n-1}^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n-1} y_i y_j$

猜想: 可逆线性替换

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{1}{2}(y_2 + \cdots + y_{n-1}) \\ z_2 = y_2 + \frac{1}{3}(y_3 + \cdots + y_{n-1}) \\ \cdots \\ z_{n-2} = y_{n-2} + \frac{1}{n-1} y_{n-1} \\ z_{n-1} = y_{n-1} \\ z_n = y_n \end{cases}$$

, 将 q_n 化为

$q_n = \frac{2}{1} z_1^2 + \frac{3}{2} z_2^2 + \cdots + \frac{n-1}{n-2} z_{n-2}^2 + \frac{n}{n-1} z_{n-1}^2 + 0 \cdot z_n^2$

当 $n=2$ 时, $q = 2y_1^2$ ✓

当 $n=3$ 时, $q = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_1 y_2 = 2(y_1 + \frac{1}{2} y_2)^2 + \frac{3}{2} y_2^2$ ✓

假设猜想对于 q_{n-1} 成立, 即线性替换

$$\begin{cases} z_1' = y_1 + \frac{1}{2}(y_2 + \cdots + y_{n-1}) \\ z_2' = y_2 + \frac{1}{3}(y_3 + \cdots + y_{n-1}) \\ \cdots \\ z_{n-2}' = y_{n-2} + y_{n-1} \\ z_{n-1}' = y_n \end{cases}$$

$\to$ 看作整体

将 $q_{n-1}(y_1, y_2, \cdots, y_{n-3}, y_{n-2} + y_{n-1}, y_n)$ 化为

$q_{n-1}(y_1, y_2, \cdots, y_{n-2} + y_{n-1}, y_n) = \frac{2}{1} z_1'^2 + \frac{3}{2} z_2'^2 + \cdots + \frac{n-2}{n-3} z_{n-3}'^2 + \frac{n-1}{n-2} z_{n-2}'^2 + 0 \cdot z_{n-1}'^2$

而 $\text{LHS} = y_1^2 + \cdots + y_{n-3}^2 + (y_{n-2} + y_{n-1})^2 + (y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})^2$

$= q_n(y_1, \cdots, y_n) + 2y_{n-2} y_{n-1} = \text{RHS}$

为了将 $2y_{n-2} y_{n-1}$ 消去, 我们只需修改 z_{n-2}' 并添加 z_{n-1}

考虑线性变换 $\begin{cases} z_1 = z_1' \\ \cdots \\ z_{n-3} = z_{n-3}' \\ z_{n-2} = y_{n-2} + \frac{1}{n-1} y_{n-1} \\ z_{n-1} = y_{n-1} \\ z_n = z_{n-1}' = y_n \end{cases}$，易知其可逆.

则 $q_n = q_{n-1}(y_1, y_2, \cdots, y_{n-2}+y_{n-1}, y_n) - 2y_{n-2}y_{n-1}$

$$= \frac{2}{1}z_1^2 + \frac{3}{2}z_2^2 + \cdots + \frac{n-2}{n-3}z_{n-3}^2 + \frac{n-1}{n-2}(y_{n-2}+y_{n-1})^2 - 2y_{n-2}y_{n-1}$$

$$= \frac{2}{1}z_1^2 + \cdots + \frac{n-2}{n-3}z_{n-3}^2 + \frac{n-1}{n-2}\left(y_{n-2}^2 + \frac{2}{n-1}y_{n-2}y_{n-1} + \left(\frac{1}{n-1}y_{n-1}\right)^2\right) + \left(1+\frac{1}{n-1}\right)y_{n-1}^2$$

$$= \frac{2}{1}z_1^2 + \cdots + \frac{n-2}{n-3}z_{n-3}^2 + \frac{n-1}{n-2}z_{n-2}^2 + \frac{n}{n-1}z_{n-1}^2$$

故存在可逆线性替换

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{1}{2}(y_2 + \cdots + y_{n-1}) \\ z_2 = y_2 + \frac{1}{3}(y_3 + \cdots + y_{n-1}) \\ \cdots\cdots \\ z_{n-2} = y_{n-2} + \frac{1}{n-1}y_{n-1} \\ z_{n-1} = y_{n-1} \\ z_n = y_n \end{cases}$$

，其中 $\begin{cases} y_1 = x_1 - \bar{x} \\ y_2 = x_2 - \bar{x} \\ \cdots \\ y_{n-1} = x_{n-1} - \bar{x} \\ y_n = -\bar{x} \end{cases}$，使得 q 为标准型

此时，$q = \frac{2}{1}z_1^2 + \frac{3}{2}z_2^2 + \cdots + \frac{n}{n-1}z_{n-1}^2 + 0 \cdot z_n^2$

高代II习题课 - HW9

甘 2025.4.22.

思考题 6.18. 以下只考虑 $\mathbb{A}^n$ 上的仿射变换和 $\mathbb{A}^n$ 中的图形. 证明:

1. 假设仿射变换 $\alpha: X \mapsto MX + t$ 由矩阵 M 和向量 t 给出. 则下列陈述等价:
   (i) α 是可逆映射.
   (ii) 矩阵 M 是可逆矩阵.
   (iii) α 是单射.
   (iv) α 是满射.
2. 恒等变换是一个仿射变换. 两个仿射变换的复合仍是仿射变换. 如果一个仿射变换是可逆映射, 那么其逆映射也是仿射变换.
3. 对于仿射空间 $\mathbb{A}^n$ 内的图形而言, 仿射等价是一个等价关系.
4. 对于任意取定的仿射变换 $\alpha \in \mathbf{End}(\mathbb{A}^n)$, 存在唯一一对仿射变换 $\beta \in \mathbf{End}(\mathbb{A}^n)$ 和 $\theta \in \mathbf{End}(\mathbb{A}^n)$ 满足: $\alpha = \beta \circ \theta$, 且 β 是平移变换, θ 是线性变换.
   如果 $\alpha \in \mathbf{GL}(\mathbb{A}^n)$ (即 α 是可逆的仿射变换), 则又存在唯一一对仿射变换 $\beta' \in \mathbf{End}(\mathbb{A}^n)$ 和 $\theta' \in \mathbf{End}(\mathbb{A}^n)$ 满足: $\alpha = \theta' \circ \beta'$, 且 β' 是平移变换, θ' 是线性变换.
5. 如果 $\beta \in \mathbf{End}(\mathbb{A}^n)$ 是平移变换, $\alpha \in \mathbf{GL}(\mathbb{A}^n)$, 则 $\alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha$ 也是平移变换. ■

1. • i) ⇒ ii) 若 α 可逆, 则 $\forall Y \in \mathbb{A}^n$

$MX + t = Y$ 有且仅有一解.

即 $MX = Y$ 有且仅有一解.

故 M 可逆.

• ii) ⇒ iii) 若 $MX_1 + t = MX_2 + t$,

则 $M(X_1 - X_2) = 0$. 由 M 可逆, $X_1 = X_2$.

• iii) ⇒ iv) α 单 ⇒ 当且仅当 $X = 0$ 时, $MX = 0$.

⇒ M 列满秩, 即可逆.

⇒ $\forall Y \in \mathbb{A}^n$, $X = M^{-1}(Y - t)$ 满足 $MX + t = Y$.

• iv) ⇒ i) α 满射 ⇒ $\alpha': X \to MX$ 满射 ⇒ α' 单射 ⇒ α 单射.

2. • $M = I_n$, $t = 0$, α 为恒等变换.

• 令 $\alpha_i: X \mapsto M_i X + t_i$, $i = 1, 2$. 则 $\alpha_2 \circ \alpha_1(X) = \alpha_2(M_1 X + t_1) = M_2 M_1 X + M_2 t_1 + t_2$

• 若 $\alpha: X \mapsto MX + t$ 可逆, 易证 $\alpha^{-1}: Y \mapsto M^{-1}Y - M^{-1}t$ 为 α 的逆映射.

故为仿射变换.

3. 若 G 是一个仿射图形, $id \cdot G = G$.

若仿射图形 G_1, G_2 满足 $G_2 = \alpha \cdot G_1$, 其中 α 为仿射变换, 则 $G_1 = \alpha^{-1} G_2$.

由 2, α^{-1} 亦为仿射变换

若仿射图形 G_1, G_2, G_3 满足 $G_2 = \alpha G_1$, $G_3 = \beta \cdot G_2$, 其中 α, β 为仿射变换

则 $G_3 = \beta \circ \alpha \cdot G_1$, 由 2, $\beta \circ \alpha$ 为仿射变换.

故是等价关系

4. • $\alpha: X \mapsto MX + t$, 可取 $\theta: X \mapsto MX$, $\beta: X \mapsto X + t$.

证唯一性: 若 $M'X + t' = MX + t$, $\forall X \in \mathbb{A}^n$, 则 $(M' - M)X = t - t'$, $\forall X \in \mathbb{A}^n$

取 $X = 0$, 得 $t = t'$. 故 $(M - M')X = 0$, $\forall X \in \mathbb{A}^n$ ⇒ $M = M'$

- 存在性：M可逆，可取 $\theta: X \mapsto MX$, $\beta: X \mapsto X + M^{-1}t$.

  则 $\theta\circ\beta: X \longmapsto M(X+M^{-1}t) = MX+t$

  唯一性：若 $MX+t = M'(X+t') = M'X+M't'$, $\forall X\in \mathbb{A}^n$，则由上题的唯一性

  $t = M't'$，$M=M'$. 即 $M=M'$, $t' = M'^{-1}\cdot t$.

5. 令 $\alpha: X \mapsto MX+t$，$\beta: X \longmapsto X+b$

$$\alpha^{-1}\circ\beta\circ\alpha(X) = \alpha^{-1}(MX+t+b) = M^{-1}(MX+b) = X+M^{-1}b$$

思考题 6.21. 沿用 (6.3.7) 一段中的记号, 记 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix}$.

1. 验证 (6.3.7.6) 式可以按矩阵方式写成
$$\begin{pmatrix} A' & b' \\ b'^T & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. 对于形如 (6.3.7.1) 式的二元二次多项式 f, 证明: 实二次型 $\langle A\rangle$ 和 $\langle \tilde{A}\rangle$ 的规范形在对 f 做可逆的仿射变量替换时是不变的.
3. 以 $s(A)$ 和 $s(\tilde{A})$ 分别表示实二次型 $\langle A\rangle$ 和 $\langle \tilde{A}\rangle$ 的符号差. 证明以下自然数只依赖于 f 的仿射等价类:
$$\operatorname{rank}(A), |s(A)|, \operatorname{rank}(\tilde{A}), |s(\tilde{A})|.$$
也就是说, 如果 g 和 f 仿射等价, 那么与 g 和 f 对应的这些自然数分别对应相等. ■

1. 矩阵乘法验证即可
2. 由1.易得
3. 令仿射变换后的 $A, \hat{A}$ 分别为 $A', \hat{A}'$.

由于 A, A' 合同，$\hat{A}, \hat{A}'$ 合同， $\begin{cases} \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A', & s(A)=s(A') \\ \operatorname{rank} \hat{A} = \operatorname{rank} \hat{A}', & s(\hat{A}) = s(\hat{A}') \end{cases}$

习题 6.3.2. 确定如下方程定义的二次曲面仿射等价类型:

1. $(2x+y+z)^2 - (x-y-z)^2 = y-z$;

记：$\begin{cases} X = 2x+y+z \\ Y = x-y-z \\ Z = y-z \end{cases} \Rightarrow X^2-Y^2-Z=0$ 故是马鞍面.

习题 6.3.3. 假设实数 a, b, c 满足 $(a^2+b^2)c \neq 0$. 试判断二次曲线
$$ab(x^2-y^2) - (a^2-b^2)xy = c$$
的仿射等价类型.

若 $a=0$，则二次曲线为 $b^2xy-c=0$ 其中 $b^2\neq 0$, $c\neq 0$. 故为双曲线

若 $b=0$，则二次曲线为 $a^2xy+c=0$，其中 $a^2\neq 0$，$c\neq 0$，故亦为双曲线

若 a,b 均非零，则 $x^2-(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})xy-y^2-\frac{c}{ab}=0$，配方得：

$$\left[x-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)y\right]^2-\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2\right]y^2-\frac{c}{ab}=0.$$

故曲线为双曲线

综上曲线恒为双曲线.

习题 6.3.5. 假设 $a_i,\, b_i,\, c_i \in \mathbb{R},\, i=1,\,2,\,3$ 满足

$$a_1b_2-a_2b_1\neq 0\,,\quad a_1a_2+b_1b_2=0\,.$$

试问二次曲线

$$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$$

是哪种类型的曲线？

$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，即 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$.

故 $\begin{cases} X=a_1x+b_1y+c_1 \\ Y=a_2x+b_2y+c_2 \end{cases}$ 为可逆的仿射变换.

故为椭圆

习题 6.3.7. 按照实参数 λ 的取值讨论下列二次曲线的仿射等价类型:

1. $(1+\lambda^2)(x^2+y^2)-4\lambda xy+2\lambda(x+y)+2=0.$

令 $X=x+y$，$Y=x-y$，曲线方程为

$$\begin{aligned} 0&=(1+\lambda^2)(X^2+Y^2)-2\lambda(X^2-Y^2)+4\lambda X+4 \\ &=(\lambda-1)^2X^2+(1+\lambda)^2Y^2+4\lambda X+4 \\ &=\begin{cases} (\lambda-1)^2\left(X+\frac{2\lambda}{(\lambda-1)^2}\right)^2+(1+\lambda)^2Y^2+\frac{4(1-2\lambda)}{(\lambda-1)^2}, & \lambda\neq 1 \\ 4Y^2+4X+4, & \lambda=1. \end{cases} \end{aligned}$$

于是 当 $\lambda=1$ 时，为抛物线；

当 $\lambda=-1$ 时，为两条虚平行线；

当 $\lambda>\frac{1}{2}$，$\lambda\neq 1$ 时，为椭圆；

当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时为一个点、

当 $\lambda<\frac{1}{2}$，$\lambda\neq -1$ 时，为虚椭圆

习题 6.3.10. 设 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 是对称阵, $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $c \in \mathbb{R}$. 记 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix}$.

证明: $\mathrm{rank}(A) \le \mathrm{rank}(\tilde{A}) \le \mathrm{rank}(A) + 2$.

证: • $\mathrm{rank}\,A \le \mathrm{rank}\,\hat{A}$ 显然 (取 A 的一个极大线性无关的列向量组, 对应 $\hat{A}$ 中的列向量组仍线性无关.)

• $\mathrm{rank}\,\hat{A} \le \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A \\ b^T \end{pmatrix} + 1 \le \mathrm{rank}\,A + 2$

思考题 7.2. 假设 φ 是向量空间 V 上一般的非退化对称双线性型, $v_1, v_2 \in V$ 是非零向量且关于 φ 正交. 是否 v_1, v_2 一定线性无关? 若是, 请解释理由. 若否, 请举出反例. ■

否. $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 - x_2^2$. 取 $\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$M_{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ 非退化

但是 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

习题 7.1.3. 设 u, v 是内积空间 V 中的向量.

1. 证明: 若 u 和 v 长度相同, 则 $u + v$ 与 $u - v$ 正交.
2. 证明菱形的两条对角线互相垂直.

证: $\langle u+v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,v\rangle = 0$

菱形两相邻边长度相同, 由1即得.

习题 7.1.4. 设 u, v 是内积空间 V 中的向量. 证明下列条件等价:

1. u 与 v 正交.
2. 对所有 $a \in \mathbb{R}$ 均有 $\|u\| \le \|u + av\|$.

"$\Rightarrow$" $\langle u+av, u+av\rangle = \langle u,u\rangle + 2a\langle u,v\rangle + a^2\langle v,v\rangle$

$= \langle u,u\rangle + a^2\langle v,v\rangle \geq \langle u,u\rangle$

"$\Leftarrow$" 特别地, 取 $a=1$, 则有

三角不等式

$\langle u+v, u+v\rangle \geq \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + 2\langle u,v\rangle \geq \langle u+v, u+v\rangle$

故上式各处均等. 即 $\langle u,v\rangle = 0$

习题 7.1.6. 设 u, v 是内积空间 V 中的向量. 证明: 若 $\|u\| \le 1$, $\|v\| \le 1$, 则

$$\sqrt{1-\|u\|^2} \cdot \sqrt{1-\|v\|^2} \le 1 - |\langle u, v\rangle| .$$

证: 由 Cauchy-Schwarz 定理, $|\langle u, v\rangle| \le \|u\|\|v\|$. 故

$$1 - |\langle u, v\rangle| \ge 1 - \|u\|\|v\| = \sqrt{1 - 2\|u\|\cdot\|v\| + \|u\|^2\cdot\|v\|^2}$$

$a \cdot b \le \frac{a^2+b^2}{2}$ for all $a, b \ge 0$.

$$\ge \sqrt{1 - 2\cdot\frac{\|u\|^2+\|v\|^2}{2} + \|u\|^2\cdot\|v\|^2}$$

$$= \sqrt{1-\|u\|^2}\cdot\sqrt{1-\|v\|^2}$$

高代习题课 - HW10

甘 2025.5.6

思考题 7.4. 考虑二阶实正交方阵集合 $\mathbf{O}_2(\mathbb{R})$, 其中的子集 $\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$ 如思考题 7.3 中定义.

证明:

1. 对于任意 $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, 下列陈述等价:

   (i) $A \in \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$.

   (ii) 存在唯一的 $\theta \in [0, 2\pi[:= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 2\pi\}$ 使得 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

2. 令 $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. 则对任意 $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ 下列陈述等价:

   (i) $A \in \mathbf{O}_2(\mathbb{R})$ 且 $\det(A) = -1$.

   (ii) 存在唯一的 $\theta \in [0, 2\pi[:= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 2\pi\}$ 使得 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

   (iii) $AJ \in \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$.

   (iv) $JA \in \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$.

3. 对于任意 $A \in \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$, 均有 $J^{-1}AJ \in \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$. 而且, 映射

$$\mathbf{SO}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})\,; \quad M \longmapsto J^{-1}MJ$$

   是双射. ■

上面我们提到实正交矩阵的列向量组构成 $\mathbb{R}^n$ 中的规范正交基. 对于一般的实内积空间, 正交矩阵和规范正交基的对应关系可以用下面的命题描述.

证: 1. i) ⇒ ii) 任取 $A \in SO_2(\mathbb{R})$, 令 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

于是有 $A^TA = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix} = I_2$,

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$$

令 $a_{11} = \cos\theta$, $a_{21} = -\sin\theta$, $a_{22} = \cos\alpha$, $a_{12} = \sin\alpha$, $\alpha, \theta \in [0, 2\pi)$

$$\begin{cases} \cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta = \cos(\theta - \alpha) = 1 \\ \sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta = \sin(\alpha - \theta) = 0 \end{cases}$$

$\theta - \alpha \in (-2\pi, 2\pi)$, 结合图像知 $\theta - \alpha = 0$.

唯一性: 若 $\theta' \in [0, 2\pi)$ 满足 $\begin{cases} \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{cases}$, 则 $\theta' = \theta$.

ii) ⇒ i) 易证 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$

2. i) ⇒ ii) 与 1 类似.

ii) ⇒ iii) $AJ = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$ 易证

iii) ⇒ iv) $|JA| = |A||J| = |AJ| = -1$, $(JA)^T(JA) = A^TJ^TJA = A^TA = JJ^TA^TAJJ^T = JJ^T = I_2$

iv) $\Rightarrow$ i) $|A| = |JA|\cdot|J^{-1}| = 1\times(-1) = -1$

$$A^TA = A^T(J^TJ)A = (JA)^TJA = I_2$$

3. $|J^{-1}AJ| = |J^{-1}||A||J| = |A| = 1$.

$$(J^{-1}AJ)^T(J^{-1}AJ) = JA^TJJAJ = JJ = I_2$$

单射：$J^{-1}A_1J = J^{-1}A_2J$，J可逆 $\Rightarrow A_1 = A_2$

满射：$\forall B\in SO_2(\mathbb{R})$，取 $A = JBJ^{-1}$，易证 $A\in SO_2(\mathbb{R})$.

习题 7.1.8. 设 $V = \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. 定义 V 上的双线性型

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\longrightarrow\mathbb{R};\quad (A,B)\longmapsto\langle A,B\rangle := \mathrm{Tr}(A^TB).$$

证明这个双线性型是 V 上的一个内积. 该内积称为 $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 上的 Frobenius† 内积.

证：1. 对称：$\langle B,A\rangle = \mathrm{Tr}(B^TA) = \mathrm{Tr}((B^TA)^T) = \mathrm{Tr}(A^TB) = \langle A,B\rangle$

2. 正定：$\langle A,A\rangle = \mathrm{Tr}(A^TA) = \sum_{ij} a_{ij}^2 \geq 0$ 其中 $A=(a_{ij})$

且 当且仅当 $A=0$ 取"="

习题 7.1.12. 假设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$ 是五维内积空间 V 中的一组规范正交基. 令

$$\alpha_1 = \varepsilon_1+\varepsilon_3,\ \alpha_2 = \varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4,\ \alpha_3 = 2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3.$$

求子空间 $U := \mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一组规范正交基.

证：$\langle\varepsilon_1+\varepsilon_3,\varepsilon_1+\varepsilon_3\rangle = 2 \Rightarrow$ 令 $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}$

$\langle\alpha_2,\beta_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ 令 $\alpha_2' = \alpha_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_1$. $\langle\alpha_2',\alpha_2'\rangle = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow$ 令 $\beta_2 = \frac{\alpha_2'}{\sqrt{\langle\alpha_2',\alpha_2'\rangle}} = \frac{\sqrt{10}}{5}\alpha_2' = \frac{\sqrt{10}}{5}\alpha_2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\beta_1 = \frac{\sqrt{10}}{5}\alpha_2 - \frac{\sqrt{10}}{10}\alpha_1$

$\langle\alpha_3,\beta_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\alpha_3,\alpha_1\rangle = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\langle\alpha_3,\beta_2\rangle = \frac{\sqrt{10}}{5}\langle\alpha_3,\alpha_2\rangle - \frac{\sqrt{10}}{10}\langle\alpha_3,\alpha_1\rangle = \frac{\sqrt{10}}{5}\cdot 1 - \frac{\sqrt{10}}{10}\cdot 3 = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

$\alpha_3' = \alpha_3 - \langle\alpha_3,\beta_1\rangle\beta_1 - \langle\alpha_3,\beta_2\rangle\beta_2$

$= \alpha_3 - \frac{3}{\sqrt{2}}\beta_1 + \frac{\sqrt{10}}{10}\beta_2$

$\langle\alpha_3',\alpha_3'\rangle = \langle\alpha_3,\alpha_3\rangle + \frac{9}{2} + \frac{1}{10} - 3\sqrt{2}\langle\alpha_3,\beta_1\rangle + \frac{\sqrt{10}}{5}\langle\alpha_3,\beta_2\rangle$

$= 6 + \frac{9}{2} + \frac{1}{10} - 9 - \frac{1}{5} = \frac{7}{5}$

令 $\beta_3 = \alpha_3'/\sqrt{\langle\alpha_3',\alpha_3'\rangle} = \frac{\sqrt{35}}{7}\alpha_3 - \frac{3\sqrt{70}}{14}\beta_1 + \frac{1}{\sqrt{14}}\beta_2$

$$= \frac{\sqrt{35}}{7}\alpha_3 - \frac{3\sqrt{35}}{14}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{5}\alpha_2 - \frac{1}{\sqrt{14}}\frac{\sqrt{10}}{10}\alpha_1$$

$$= -\frac{8}{\sqrt{35}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{35}}\alpha_2 + \frac{\sqrt{35}}{7}\alpha_3$$

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{8}{\sqrt{35}} \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{1}{\sqrt{35}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{35}}{7} \end{pmatrix}$$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{10}}{10} & -\frac{8}{\sqrt{35}} \\ & \frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{1}{\sqrt{35}} \\ & & \frac{\sqrt{35}}{7} \end{pmatrix}$$

$$= (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_5)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{35}}{35} \\ 0 & -\frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{4\sqrt{35}}{35} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{10}}{10} & -\frac{3\sqrt{35}}{35} \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{1}{\sqrt{35}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题 7.1.15. 设 $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ 为闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上的所有实值连续函数构成的向量空间, 在其上定义内积

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

将函数组

$$1\,,\ \cos(x)\,,\ \sin(x)\,,\ \cos(2x)\,,\ \sin(2x)\,,\cdots,\ \cos(nx)\,,\ \sin(nx)\,.$$

视为 $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ 中的一组向量.

1. 证明以上函数组作为 $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ 中的向量是两两正交的.
2. 设 V 是以上函数组在 $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ 中张成的子空间. 求 V 的一组规范正交基.

1. 证：$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = 2\pi\,\delta_{n,0}$, $\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n+m)x - \sin(n-m)x\,dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\,dx = \pi\,\delta_{m,n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\,dx = \pi\,\delta_{m,n}$$

其中 $n, m \in \mathbb{N}$

2. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}$, $\cdots$, $\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ 为一组规范正交基.

习题 7.1.17. 给定 4 维列向量

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)^T, \quad \alpha_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T.$$

请给出一个正交矩阵 $Q \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$, 它的前两列为 α_1, α_2.

解: 令 $\alpha_3 = (0, a_1, b_1, c_1)^T$, $\alpha_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

则 $\begin{cases} \alpha_1^T\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2^T\alpha_3 = 0 \\ \alpha_3^T\alpha_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = c_1, \\ b_1 = -c_1 \\ a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

α_4 满足 $\begin{cases} \alpha_1^T\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2^T\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3^T\alpha_4 = 0 \\ \alpha_4^T\alpha_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \alpha_4 = 0 \\ \alpha_4^T\alpha_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_4 = k(2, 2, 3, 1)^T \\ \alpha_4^T \cdot \alpha_4 = 0 \end{cases}$

即 $\alpha_4 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(2, 2, 3, 1)^T$

此时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 组成一个正交阵.

习题 7.1.19. 设 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 是正定矩阵. 证明: 存在上三角阵 R 使得 $A = R^T R$.

由 A 正定, $\exists$ 可逆阵 P s.t. $A = P^T P$

由可逆阵 P 之 QR 分解, $\exists$ 正交 Q, 上三角 R s.t. $P = QR$

则 $A = R^T Q^T Q R = R^T R$

习题 7.1.20. 设

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{pmatrix},$$

其中 θ_1, $\theta_2 \in \mathbb{R}$. 记 $B := JA_1A_2$.

证明 $B \in \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$, 并求 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得 $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

$$B = JA_1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - \theta_2) & -\sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \sin(\theta_1 - \theta_2) & \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix}$$

习题 7.2.1. 在定义 7.2.1 中我们定义等距映射时预先要求是线性映射. 在这个习题中我们证明: 将零向量映射为零向量且保持距离不变的映射一定是线性映射.

设映射 $\mathscr{A}: V \to W$ 满足 $\mathscr{A}(0)=0$ 且对任意 $u, v \in V$ 均有 $\|\mathscr{A}u - \mathscr{A}v\| = \|u-v\|$.

证明:

1. $\mathscr{A}$ 保持向量长度不变, 即, 对任意 $v \in V$, $\|\mathscr{A}v\| = \|v\|$.
2. $\mathscr{A}$ 保持向量内积不变, 即, 对于任意 $u, v \in V$, $\langle \mathscr{A}u, \mathscr{A}v \rangle = \langle u, v \rangle$. (注意: 在不知道 $\mathscr{A}$ 线性的时候, 是否可以从极化恒等式得到想要的结论?)
3. $\mathscr{A}$ 一定是线性映射. (提示: 考虑 $\|\mathscr{A}(u+v) - \mathscr{A}u - \mathscr{A}v\|$.)

证: 1. 令 $u=0$ 即可.

2. $\|\mathscr{A}u - \mathscr{A}v\|^2 - \|u-v\|^2 = \|\mathscr{A}u\|^2 + \|\mathscr{A}v\|^2 - 2\langle \mathscr{A}u, \mathscr{A}v\rangle - \|u\|^2 - \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$

$= 2(\langle u, v\rangle - \langle \mathscr{A}u, \mathscr{A}v\rangle) = 0$

$\Rightarrow \langle u, v\rangle = \langle \mathscr{A}u, \mathscr{A}v\rangle$

3. $\|\mathscr{A}(u+v) - \mathscr{A}u - \mathscr{A}v\|^2 = \|(u+v) - u - v\|^2 = 0$

$\Rightarrow \mathscr{A}(u+v) = \mathscr{A}u + \mathscr{A}v$

习题 7.2.2. 设 V 是 n 维内积空间.

1. 对任意非零向量 $x \in V$, 定义映射

$$\tau_x : V \longrightarrow V; \quad v \longmapsto v - 2\frac{\langle v, x\rangle}{\|x\|^2}x.$$

证明: τ_x 是个线性变换, 并且是第二类正交变换. 能够写成 τ_x 这种形式的线性变换称为**镜面反射**或**镜像变换**.

2. 证明: 若 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 是个镜面反射, 则 $\mathscr{A}^2 = I$.
3. 假设 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 是正交变换, 1 是它的一个特征值, 并且满足 $\dim E(1, \mathscr{A}) = n-1$. 证明: $\mathscr{A}$ 是个镜面反射.

证: 1. $\tau_x(u+v) = u+v - 2\frac{\langle u+v, x\rangle}{\|x\|^2}x = u - 2\frac{\langle u, x\rangle}{\|x\|^2}x + v - 2\frac{\langle v, x\rangle}{\|x\|^2}$

$= \tau_x(u) + \tau_x(v) \qquad \forall u, v \in V$

$\tau_x(ku) = ku - 2\frac{\langle ku, x\rangle}{\|x\|^2}x = k\tau_x(u) \quad , \forall u \in V, k \in R$

故 τ_x 为线性变换

$\langle \tau_x(v), \tau_x(u)\rangle = \langle v - \frac{2\langle v, x\rangle}{\|x\|^2}x, u - \frac{2\langle u, x\rangle}{\|x\|^2}x\rangle$

$= \langle v, u\rangle - 2\langle v, \frac{\langle u, x\rangle}{\|x\|^2}x\rangle - 2\langle \frac{\langle v, x\rangle}{\|x\|^2}x, u\rangle + \frac{4\langle v, x\rangle\langle u, x\rangle}{\|x\|^2}$

$= \langle v, u\rangle$

令ξ为T_x的特征值为λ的特征向量，则

$$T_x(\xi) = \xi - \frac{2\langle \xi, x\rangle}{\|x\|^2} x = \lambda \xi \iff (1-\lambda)\xi = \frac{2\langle \xi, x\rangle}{\|x\|^2} x$$

① ξ与x正交，则 $\lambda = 1$

② $\langle \xi, x\rangle \neq 0$，则 $\xi = kx$，$k \in \mathbb{R}^*$，且 $(1-\lambda)kx = 2x$，即 $\lambda = -1$.

故 $\det T_x = \prod \lambda^a = -1$.

λ为特征值
a为代数重数

2. $T_x^2(v) = T_x\left(v - \frac{2\langle v, x\rangle}{\|x\|^2} x\right) = v - \frac{2\langle v, x\rangle}{\|x\|^2} x - \frac{2\langle v, x\rangle}{\|x\|^2} x + \frac{2}{\|x\|^2} \cdot \frac{2\langle v, x\rangle}{\|x\|^2} \cdot \langle x, x\rangle x$

$= v$

3. 正交变换可对角 $\Rightarrow V = \underset{\lambda\text{为特征值}}{\bigoplus} E(\lambda, \mathscr{A}) = E(-1, \mathscr{A}) \oplus E(1, \mathscr{A})$

$\Rightarrow \dim E(-1, \mathscr{A}) = 1 \Rightarrow \mathscr{A}$为第2类正交变换.

考虑非零向量 $\xi \in E(-1, \mathscr{A})$ 与 $E(1, \mathscr{A})$ 的一组基 $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$

$\mathscr{A}(v) = v - \frac{2\langle v, \xi\rangle}{\|\xi\|^2} \cdot \xi$ 对V的一组基 $(e_1, \cdots, e_{n-1}, \xi)$ 成立

故 $\mathscr{A} = T_\xi$.

习题 7.2.3. 假设 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 是个镜面反射 (参见习题 7.2.2).

1. 证明映射

$$\varphi:\ V \times V \longrightarrow \mathbb{R}; \quad (u, v) \longmapsto \langle \mathscr{A} u, v\rangle$$

是 V 上的对称双线性型.

2. 证明: 若 $\mathscr{B} \in \mathrm{End}(V)$ 是正交变换, 则 $\mathscr{B}^{-1}\mathscr{A}\mathscr{B}$ 仍是镜面反射.

1. 双线性：保加法数乘.

对称：$\varphi(v, u) = \langle \mathscr{A}v, u\rangle = \langle v, \mathscr{A}^{-1}u\rangle = \langle v, \mathscr{A}u\rangle = \varphi(u, v)$

2. 设 $\mathscr{A}(v) = v - \frac{2\langle v, x\rangle}{\|x\|^2} x$，则

$$B^{-1} A B(v) = B^{-1}\left(B(v) - \frac{2\langle B(v), x\rangle}{\|x\|^2} x\right) = v - \frac{2\langle B(v), x\rangle}{\|x\|^2} B(x)$$

$$= v - \frac{2\langle v, B(x)\rangle}{\|B(x)\|^2} B(x) = T_{B(x)}$$

高代II习题课 — HW11

赵　2025.5.13

思考题 7.8. 设 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 为正规矩阵.

1. 证明: 与 A 正交相似的矩阵也是正规矩阵.
2. 举例说明: 与 A 相似的矩阵不一定是正规矩阵.
3. 举例说明: 与 A 相合的矩阵不一定是正规矩阵.

1、若 B 与 A 正交相似，即 $\exists$ 正交阵 Q s.t. $Q^{-1}AQ=B$.

$$B^TB = Q^TA^T(Q^{-1})^TQ^{-1}AQ = Q^TA^TAQ = Q^TAA^TQ$$
$$= Q^TAQQ^TA^TQ = B\cdot B^T$$

2. $A=\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$，$C^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & 1 \end{pmatrix}$

$B=C^{-1}AC=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$B^TB=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = B^TB$

3、$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$，$B=P^TAP=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$BB^T=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$，$B^TB=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$

思考题 7.9. 设 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$.

1. 证明: 实数 λ 是 $\mathscr{A}$ 的特征值当且仅当 λ 是 $\mathscr{A}^*$ 的特征值.
   (提示: 可考虑 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}^*$ 的矩阵, 或利用 $\mathrm{Ker}(\mathscr{A}-\lambda I)$ 与 $\mathrm{Im}(\mathscr{A}^*-\lambda I)$ 之间的关系.)
2. 举例说明: $\mathscr{A}$ 的特征向量不一定是 $\mathscr{A}^*$ 的特征向量.
   (因此命题 7.2.20 中 $\mathscr{A}$ 正规的假设是不能去掉的.)

证：1、只证一边即可.

法I. 确定 V 中一组基 $\varepsilon=(e_1,\cdots,e_n)$

若 $|M_\varepsilon(\mathscr{A})-\lambda I_n|=0$，则

$$|M_\varepsilon(\mathscr{A}^*)-\lambda I_n| = |M_\varepsilon(\mathscr{A})^T-\lambda I_n| = |M_\varepsilon(\mathscr{A})-\lambda I_n|=0$$

故 λ 为 $\mathscr{A}^*$ 的特征值.

法II. $\forall v\in \mathrm{Im}(\mathscr{A}^*-\lambda I)$，$v'\in \mathrm{Ker}(\mathscr{A}-\lambda I)$，则 $\exists w\in V$ s.t. $\mathscr{A}^*w-\lambda w=v$.

注意到 $\langle v, v' \rangle = \langle \mathscr{A}^* w - \lambda w, v' \rangle = \langle w, (\mathscr{A}-\lambda I) v' \rangle = 0$

故 $\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\lambda I) \cap \operatorname{Im}(\mathscr{A}^*-\lambda I) = 0$

同理 $\operatorname{Ker}(\mathscr{A}^*-\lambda I) \cap \operatorname{Im}(\mathscr{A}-\lambda I) = 0$.

故 秩零化度定理：

$$\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\lambda I) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\mathscr{A}^*-\lambda I) \neq 0.$$

2. $V=\mathbb{R}^2$，内积为向量内积. 在标准基 ε 下，定义 $\mathscr{A}$ 为

$M_\varepsilon(\mathscr{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$，故 e_1 为 $\mathscr{A}$ 的特征值为1的特征向量

且 $M_\varepsilon(\mathscr{A}^*) = \begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，故 e_2 为 $\mathscr{A}^*$ 的特征值为1的特征向量.

但 $e_1 \notin E(1, \mathscr{A}^*)$，$e_2 \notin E(1, \mathscr{A})$

思考题 7.10. 设 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 为对称矩阵. 证明: A 正定 (半正定) 的充分必要条件是 A 的所有特征值为正实数 (非负实数). ■

证：由于A对称，A可正交相似到对角阵 D.

A正定 $\Leftrightarrow$ D正定 $\Leftrightarrow$ D的对角线均为正数 $\Leftrightarrow$ A的特征值 >0.

习题 7.2.7. 设 $u_1, \cdots, u_r$ 和 $v_1, \cdots, v_r$ 是内积空间 V 中的两组向量. 证明下列陈述等价:

(i) 存在 $\mathscr{A} \in \mathbf{O}(V)$ 使得 $\mathscr{A} u_i = v_i$ 对每个 $i \in [\![1, r]\!]$ 成立.

(ii) 对任意 $i, j \in [\![1, r]\!]$ 均有 $\langle u_i, u_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$.

证：$\Rightarrow$：用正交变换的性质证明.

$\Leftarrow$：不妨设 u_i 的极大线性无关组为 $u_1, \cdots, u_l$，定义 $\mathscr{A}: u_i \mapsto v_i$，$i=1, \cdots, l$.

习题 7.2.9. 设 $\mathscr{A} \in \operatorname{End}(V)$, U 是 V 的子空间. 证明: U 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间当且仅当 $U^\perp$ 是 $\mathscr{A}^*$ 的不变子空间.

证："$\Rightarrow$" $\forall u \in U$，$v \in U^\perp$，$\langle \mathscr{A}^* v, u \rangle = \langle v, \mathscr{A} u \rangle = 0$，因为 $\mathscr{A} u \in U$.

$\Rightarrow \mathscr{A}^* v \in U^\perp$

"$\Leftarrow$" $\forall u \in U$，$v \in U^\perp$，$\langle \mathscr{A} u, v \rangle = \langle u, \mathscr{A}^* v \rangle = 0$，因为 $\mathscr{A}^* v \in U^\perp$.

$\Rightarrow \mathscr{A} u \in U$.

习题 7.2.10. 设 $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是内积空间 V 中的一组规范正交基. 定义线性变换 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 为 $v \mapsto \mathscr{A}v = \langle v, e_1 \rangle e_2$ (参见例 7.2.9).

求矩阵 $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$ 和 $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}^*)$.

$$\mathscr{A}(e_i) = \begin{cases} e_2 & i=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = E_{21}$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}^*) = E_{12}$$

习题 7.2.11. 设 $V = \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. 考虑 V 上的 Frobenius 内积 (参见习题 7.1.8):

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}; \quad (A, B) \longmapsto \langle A, B \rangle := \mathrm{Tr}(A^T B).$$

给定矩阵 $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, 定义 $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ 为 $\varphi(A) = MA$. 求 (φ 相对于 Frobenius 内积的) 伴随变换 φ^* 的表达式.

解. $\langle \varphi(A), B \rangle = \langle MA, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^T M^T B)$

同时, $\langle A, \varphi^*(B) \rangle = \mathrm{Tr}(A^T \varphi^*(B))$

令 $A = E_{ij}$ 则 $\varphi^*(B)_{ij} = (M^T B)_{ij}$, $\forall i,j$.

故 $\varphi^*(B) = M^T B$

习题 7.2.12. 设 $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$. 按照如下方式定义 V 上的内积:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

定义线性变换 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 为 $\mathscr{A}(a_0 + a_1X + a_2X^2) = a_1X$.

1. 求 $\mathscr{A}$ 在有序基 $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ 下的矩阵.
2. 相对于以上所给的内积, $\mathscr{A}$ 是否是自伴变换？为什么？

1. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathscr{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. 令 $f = \sum a_i X^i$, $\langle \mathscr{A}f, 1 \rangle = \int_0^1 a_1 X \, dX = \frac{a_1}{2}$

但是 $\langle f, \mathscr{A}1 \rangle \equiv 0$. $\Rightarrow$ 若 $a \neq 0$, 则 $\langle \mathscr{A}f, 1 \rangle \neq \langle f, \mathscr{A}1 \rangle$

故 $\mathscr{A}$ 不是自伴算子,

原因: $1, X, X^2$ 不是规范正交基.

习题 7.2.13. 对下列对称阵 A, 分别求一个正交矩阵 Q 使 $Q^{-1}AQ$ 成为对角阵:

$$A=\begin{pmatrix}-1&-3&3&-3\\-3&-1&-3&3\\3&-3&-1&-3\\-3&3&-3&-1\end{pmatrix};$$

解: $|xI-A| = \begin{vmatrix}x+1&3&-3&3\\3&x+1&3&-3\\-3&3&x+1&3\\3&-3&3&x+1\end{vmatrix} = (x+4)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x-2&0&-6\\-6&0&x-2&0\\0&-6&0&x-2\end{vmatrix}$

$= (x+4)\left[(x-2)^3+6(x-2)^2-6^2(x-2)-6^3\right] = (x+4)^3(x-8)$

当 $x=8$ 时, $8I-A=\begin{pmatrix}9&3&-3&3\\3&9&3&-3\\-3&3&9&3\\3&-3&3&9\end{pmatrix} \Rightarrow \xi_4'=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\xi_4=\frac{1}{2}\xi_4'$

当 $x=-4$ 时. $-4I-A=\begin{pmatrix}-3&3&-3&3\\3&-3&3&-3\\-3&3&-3&3\\3&-3&3&-3\end{pmatrix}$ 令 $\mathscr{A}: X\mapsto AX$.

$E(-4,\mathscr{A})$ 的一组基为 $e_1=(1,1,0,0)^T$, $e_2=(-1,0,1,0)^T$, $e_3=(1,0,0,1)^T$

令 $\xi_1=\frac{e_1}{\sqrt{2}}$, $\xi_2'=2e_2+e_1$, $\xi_2=\frac{\xi_2'}{\sqrt{\xi_2'^T\xi_2'}}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2,0)^T$

$\xi_3'=3(e_3-\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\xi_2)=(1,-1,1,3)$ $\quad\xi_3=\frac{\xi_3'}{\sqrt{\xi_3'^T\xi_3'}}=\frac{1}{\sqrt{12}}(1,-1,1,3)^T$

令 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{2\sqrt{3}}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{3}{2\sqrt{3}}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

习题 7.2.15. 设 $\mathscr{A}\in\mathrm{End}(V)$. 对以下论断给出证明或举出反例:

如果存在 V 的一组规范正交基 $e_1,\cdots,e_n$ 使得对于每个 $j\in[\![1,n]\!]$ 均有 $\|\mathscr{A}e_j\|=\|\mathscr{A}^*e_j\|$, 则 $\mathscr{A}$ 是正规的.

反例: $M_\varepsilon(\mathscr{A})=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}=:A$, $A^TA=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix} \neq AA^T=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

高代II习题课 - Hw 12

助教 2025.5.23

习题 7.2.16. 取定 $u, x \in V$. 定义线性变换 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 为 $v \mapsto \mathscr{A}v = \langle v, u\rangle x$. 证明下列陈述等价:

(i) $\mathscr{A}$ 是自伴的.

(ii) $\mathscr{A}$ 是正规的.

(iii) 向量组 u, x 线性相关.

证: $\forall v, v' \in V$, $\langle \mathscr{A}v, v'\rangle = \langle v, u\rangle\langle x, v'\rangle = \langle v, \langle x, v'\rangle u\rangle$

由伴随的唯一性, $\mathscr{A}^*: v \mapsto \langle x, v\rangle u$.

$$(\mathscr{A}\mathscr{A}^* - \mathscr{A}^*\mathscr{A})v = \langle x, v\rangle \mathscr{A}u - \langle v, u\rangle \mathscr{A}^* x$$

$$= \langle x, v\rangle\langle u, u\rangle x - \langle v, u\rangle\langle x, x\rangle u$$

i) ⇒ ii) ✓

ii) ⇒ iii) 若 $\mathscr{A}$ 正规, ① x 或 $u = 0$, 显然

② x & $u \neq 0$. 取 $v = x$, $\langle x, x\rangle\langle u, u\rangle x - \langle x, u\rangle\langle x, x\rangle u = 0$

即 $x = \dfrac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u$, 故线性相关

iii) ⇒ i) 不妨令 $x = ku$, ($u = kx$ 可类似考虑)

$$(\mathscr{A}^* - \mathscr{A})v = \langle x, v\rangle u - \langle v, u\rangle x$$

$$= k\langle u, v\rangle u - k\langle v, u\rangle u = 0, \quad \forall v \in V$$

即 $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$

习题 7.2.17. 举例说明: 如果不假设 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 是正规算子, 那么有可能存在子空间 U 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, 但 $U^\perp$ 不是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

$V = \mathbb{R}^2$, 在标准基下 $M_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$

$U = \mathrm{span}\{e_1\}$, $U^\perp = \mathrm{span}\{e_2\}$

习题 7.2.19. 设 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 为正规变换. 证明: $\mathrm{Im}(\mathscr{A}) = \mathrm{Im}(\mathscr{A}^*)$.

证: 选取一组规范正交基, 观察 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{A}^*$ 对应的标准型矩阵可得.

习题 7.2.20. 设 $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 均为对称阵. 证明: A 和 B 正交相似的充分必要条件是 A 和 B 的特征多项式相同.

"$\Rightarrow$" 若 $\exists P$ 正交, s.t. $P^{-1}BP = A$, 则

$$|\lambda I - A| = |P^{-1}|\,|\lambda I - B|\,|P| = |\lambda I - B|$$

"$\Leftarrow$" A, B 对称, $\exists$ 正交 P, Q s.t. $P^{-1}AP = D$, $Q^{-1}BQ = E$

其中 $D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$, $E = \mathrm{diag}(e_1, \cdots, e_n)$, $d_i \geq d_j$, $e_i \geq e_j$ $\forall i > j$.

$\Rightarrow |\lambda I - A| = \prod(\lambda - d_i) = |\lambda I - B| = \prod(\lambda - e_i)$

$\Rightarrow D = E \Rightarrow A, B$ 正交相似

习题 7.2.22. 设 $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 均为对称阵, 其中 A 正定. 证明: 存在可逆矩阵 $P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^T AP$ 和 $P^T BP$ 同时为对角阵. (提示: 先考虑 $A = I_n$ 的情况.)

证. $\exists$ 正交阵 Q s.t. $Q^{-1}AQ = I_n$, $Q^{-1}BQ$ 为对称阵.

故 $\exists P$ 正交 s.t. $P^{-1}Q^{-1}BQP$ 对角, 此时 $P^{-1}Q^{-1}AQP = I_n$.

习题 7.2.23. 证明: 如果 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 是斜对称阵, 那么 A 在 $\mathbb{C}$ 中的特征值都是纯虚数 (即, 可以写成 bi 的形式, 其中 $b \in \mathbb{R}$).

证: 设 $A\xi = \lambda\xi$, 则 $\overline{(A\xi)}^T \cdot (A\xi) = -\bar{\xi}^T AA\xi = -\lambda^2 \|\xi\|$

同时, 直接计算得 $\overline{(A\xi)}^T \cdot (A\xi) = \lambda\bar{\lambda}\,\bar{\xi}^T\xi = |\lambda|^2 \|\xi\|$

若 $\xi \neq 0$, 则 $|\lambda|^2 = -\lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}i$.

习题 7.2.24. 设 $b, c \in \mathbb{R}$ 且 $b^2 - 4c < 0$. 举例说明: 存在线性变换 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 使得 $\mathscr{A}^2 + b\mathscr{A} + cI$ 不可逆.

(这说明: 引理 7.2.24 如果不假设 $\mathscr{A}$ 自伴, 那么结论不再成立.)

$c = -b = 1$, $V = \mathbb{R}^2$, ε 标准基, $M_\varepsilon(\mathscr{A}) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$M_\varepsilon(\mathscr{A}^2 + b\mathscr{A} + cI) = 0$.

习题 7.2.30. 设 $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ 是闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上所有的实值连续函数构成的空间, 在其上定义内积如下:

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

取

$$V = \mathrm{span}(1, \cos(x), \cos(2x), \cos(3x), \sin(x), \sin(2x), \sin(3x)).$$

1. 证明: 对于任意 $f \in V$, 其导函数 f' 也属于 V.
2. 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A} : V \to V$, $f \mapsto f'$. 证明 $\mathscr{A}$ 是斜对称变换.
3. 求 V 的一组规范正交基 $\mathcal{E}$, 使得矩阵 $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$ 具有正交相似标准形 (即定理 7.2.35 的结论 (iii), (iv) 或 (v) 中的形式).

证: 1. 考虑基的导函数即得.

2. 令 $\mathcal{E} = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}})$ 为一组基 (规范正交)

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & -2 & & & \\ & & & & & & 3 \\ & & & & & -3 & \end{pmatrix}$$ 反对称

3. 即 2.

思考题 7.14. 设 F_1 和 F_2 是 $\mathbb{A}^n$ 中的两个线性仿射集, 即, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 U_1, U_2 及向量 v_1, v_2 使得 $F_i = v_i + U_i$. 证明以下断言等价:

(i) F_1 和 F_2 维数相等, 即, $\dim U_1 = \dim U_2$.

(ii) F_1 和 F_2 度量等价.

(iii) F_1 和 F_2 仿射等价. ■

证: i) ⇒ ii) 取 U_1, U_2 的一组标准正交基 $e_1, \cdots, e_l \in U_1$, $f_1, \cdots, f_l \in U_2$.

令 $\mathscr{A}: v_1 + e_i \mapsto v_2 + f_i$, $\forall i$. 则 $\mathscr{A}$ 为正交变换.

ii) ⇒ iii) 正交变换是特殊的可逆仿射变换

iii) ⇒ i) 若 $\mathscr{A} = \mathscr{B} + t$ 是 $F_1 \to F_2$ 的仿射等价, $\mathscr{B}$ 为线性变换, t 平移.

则 $\mathscr{B}: U_1 \to U_2$ 可逆 $\Rightarrow \dim U_1 = \dim U_2$

习题 7.3.4. 通过直角坐标变换确定下列二次曲线的类型、形状和位置, 并画出草图:

1. $11x^2 + 6xy + 3y^2 - 12x - 12y - 12 = 0$;

$$(x, y)\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-12, -12)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 12 = 0$$

令 $A=\begin{pmatrix}11 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}$，$|\lambda I-A| = \lambda^2-14\lambda+24=(\lambda-2)(\lambda-12)$

当$\lambda=2$时，取$\xi_1=(-1,3)^T$，当$\lambda=12$时，取$\xi_2=(3,1)^T$

令 $Q=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$，$Q$正交，故令 $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=Q^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，则有

$$原式 = (X,Y)\,Q^TAQ\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}-12(1,1)\,Q\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}-12$$

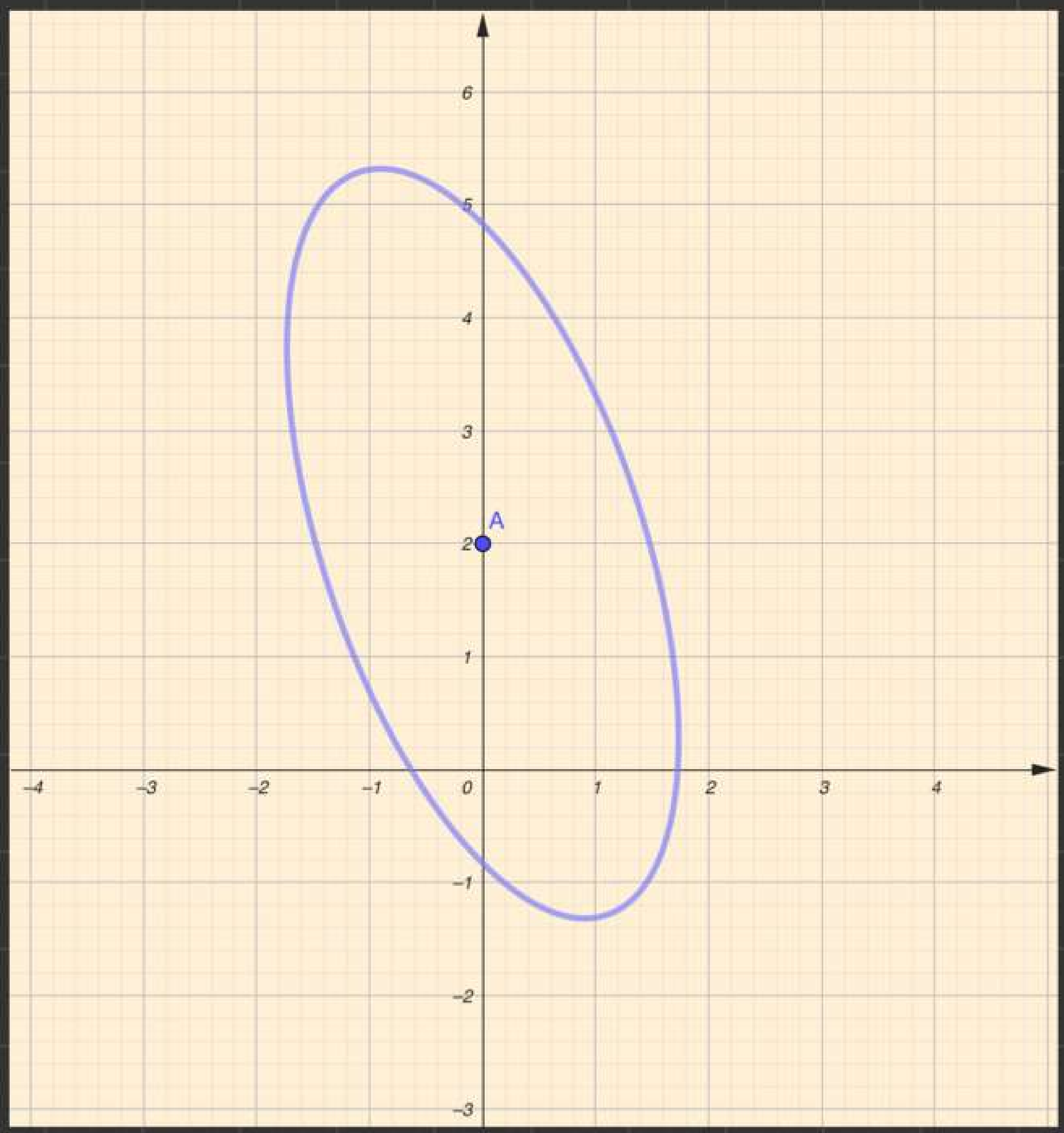
$$=(X,Y)\begin{pmatrix}2 & \\ & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+2\cdot\frac{12}{\sqrt{10}}(1,-2)\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}-12$$

$$=2X^2+12Y^2+\frac{24}{\sqrt{10}}X-\frac{48}{\sqrt{10}}Y-12=2\left(X+\frac{6}{\sqrt{10}}\right)^2+12\left(Y-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2-d$$

其中 $d=\frac{12^2}{20}+\frac{4\times12^2}{12\times10}+12=\frac{36}{5}+\frac{24}{5}+12=24>0$

令 $\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}=Q^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\frac{2}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$，则方程为$2z^2+12w^2=24$

即 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$



故方程为椭圆.

高代习题课—Hw 13

2025.5.27

思考题 7.15. 设 V 是实内积空间, $U \subseteq V$ 是一个有限维子空间. 证明: $(U^\perp)^\perp = U$. (注意: $U^\perp$ 可能是无限维的.) ■

$\forall\, u \in U,\ v \in U^\perp,\quad \langle u, v\rangle = 0 \Rightarrow U \subseteq (U^\perp)^\perp$

若 $w \in (U^\perp)^\perp \setminus U,\quad \langle w, v\rangle = 0 \Rightarrow w \in U$

$\Rightarrow U = (U^\perp)^\perp$

思考题 7.16. 证明: 对任意矩阵 $A \in \mathbf{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ 和任意列向量 $b \in \mathbb{R}^n$, 分块矩阵 $(A^TA\ \ A^Tb)$ 的秩等于 A^TA 的秩. (因此方程 (7.3.15.2) 总会有解.) ■

证: $r(A^TA) \le r(A^TA\ \ A^Tb) = r(A^T(A\ b)) \le r(A) = r(A^TA)$

故在每处均取等.

习题 7.3.8. 假设方程

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

定义的曲线是一条抛物线. 证明: 该抛物线的顶点是原点的充分必要条件是

$$a_{11}b_1^2 + a_{22}b_2^2 + 2a_{12}b_1b_2 = c = 0.$$

方程过原点 $\Rightarrow c=0$.

不妨设 $a_{11}>0$. 则 $a_{22}>0$, 可将方程化简为 $(\sqrt{a_{11}}\,x + \sqrt{a_{22}}\,y)^2 + 2b_1x + 2b_2y = 0$

抛物线顶点为原点 $\Longleftrightarrow (\sqrt{a_{11}}, \sqrt{a_{22}})(2b_1, 2b_2)^T = 0$

即 $(\sqrt{a_{11}}\,b_1 + \sqrt{a_{22}}\,b_2)^2 = 0$, 又 $2\sqrt{a_{11}a_{22}} = 2a_{12}$.

故证毕.

习题 7.3.9. 假设方程

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

定义的曲线 C 是双曲线.

证明:

1. C 的两条渐近线分别和方程 $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ 所表示的两条相交直线平行.
2. 进一步假设 $b_1 = b_2 = 0$. 则双曲线 C 的两条渐近线恰好是方程 $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ 所表示的两条相交直线.

1. $\exists$ 等距变换 $\mathcal{A} = \mathcal{B} + t$, $\mathcal{B}$ 线性. $(X, Y)^T = \mathcal{A}(x, y)^T$ s.t.

$$(x, y)A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + 2b^T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + c = (X, Y)\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & \\ & -\frac{1}{b^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} - 1 = 0$$

则 $B^T A B = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & \\ & -\frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$，故 C 的两条渐近线为

$$(X, Y)\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & \\ & -\frac{1}{b^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0$$ ，即 $(x,y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 平移之后的图形

2. 若 $b^T = 0$，则不需要平移，故方程就表示两条渐近线.

习题 7.3.13. 设 V 是实内积空间，U, W 是两个子空间，$\alpha, \beta \in V$. 将

$$d(\alpha, \beta + W) := \inf\{\|\alpha - v\| : v \in \beta + W\},$$
$$d(\alpha + U, \beta + W) := \inf\{\|\gamma - v\| : \gamma \in \alpha + U, v \in \beta + W\}$$

分别称为 α 到 (线性) 仿射集 $\beta + W$ (参见本书上册 §2.2.3 小节) 的**距离**，以及 (线性) 仿射集 $\alpha + U$ 和 $\beta + W$ 之间的**距离**.

1. 假设 $\beta - \alpha = \beta_1 + \beta_2$，其中 $\beta_1 \in W$，$\beta_2 \in W^{\perp}$. 证明：$d(\alpha, \beta + W) = \|\beta_2\|$.
2. 假设 $\beta - \alpha = \delta_1 + \delta_2$，其中 $\delta_1 \in U + W$，$\delta_2 \in (U + W)^{\perp}$. 证明：$d(\alpha + U, \beta + W) = \|\delta_2\|$.

证：1. $d(\alpha, \beta + W) = \inf\{\|\alpha - \beta - w\| : w \in W\}$

$= \inf\{\|\beta_1 - \beta_2 - w\| : w \in W\}$

$= \inf\{\sqrt{\|\beta_2\|^2 + \|\beta_1 - w\|^2} : w \in W\}$

$= \|\beta_2\|$

2. $d(\alpha + U, \beta + W) = \inf\{\|\alpha + u - \beta - w\| : u \in U, w \in W\}$

$= \inf\{\|\delta_1 + \delta_2 + u + w\| : u \in U, w \in W\}$

$= \inf\{\sqrt{\|\delta_2\|^2 + \|\delta_1 + v\|^2} : v \in U + W\}$

$= \|\delta_2\|$

习题 7.3.16. 设 V 是有限维内积空间，$\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$. 证明以下条件等价：

(i) $\mathrm{Ker}(\mathscr{A})$ 与 $\mathrm{Im}(\mathscr{A})$ 正交，且 $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$.

(ii) 存在子空间 $U \subseteq V$ 使 $\mathscr{A} = P_U$.

证：i⇒ii $U = \mathrm{Im}\mathscr{A}$

ii⇒i，$\mathrm{Im}\mathscr{A} = U$，$\ker\mathscr{A} = U^{\perp} \Rightarrow \ker\mathscr{A} \perp \mathrm{Im}\mathscr{A}$.

$\mathscr{A}^2 = P_U^2 = P_U = \mathscr{A}$

习题 7.3.17. 设 V 是有限维内积空间, $U \subseteq V$ 是一个子空间.

1. 证明 $P_{U^\perp} = I - P_U$.
2. 设 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$. 证明以下条件等价:

   (i) U 和 $U^\perp$ 都是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

   (ii) P_U 与 $\mathscr{A}$ 可交换.

证: 1. $\forall\, v \in V$, $\exists\, u \in U$, $w \in U^\perp$ s.t. $v = u + w$, 则

$$(I - P_U)(v) = v - u = w = P_{U^\perp}(v)$$

2. i) $\Rightarrow$ ii) $\forall\, v \in U$, u, w 如上.

$$\mathscr{A} P_U(v) = \mathscr{A} u = P_U \mathscr{A} u$$

ii) $\Rightarrow$ i) $\forall\, u \in U$ $\mathscr{A} u = \mathscr{A} P_U u = P_U \mathscr{A} u \Rightarrow \mathscr{A} u \in U$

$\forall\, w \in U^\perp$, $P_U \mathscr{A} w = \mathscr{A} P_U w = 0 \Rightarrow \mathscr{A} w \in U^\perp$

习题 7.3.18. 设 V 是有限维内积空间, $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$. 证明以下条件等价:

(i) $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$ 且对于所有 $v \in V$ 均有 $\|\mathscr{A} v\| \leq \|v\|$.

(ii) 存在子空间 $U \subseteq V$ 使 $\mathscr{A} = P_U$.

证: i) $\Rightarrow$ ii) 由于 $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$, $V = \mathrm{Im}\mathscr{A} \oplus \ker\mathscr{A}$.

下证: $\mathrm{Im}\mathscr{A} \perp \ker\mathscr{A}$. 若不然, 则存在 $w \in \ker\mathscr{A}$, $v \in \mathrm{Im}\mathscr{A}$ s.t. $\langle v, w\rangle < 0$

于是 $\|kv + w\|^2 - \|\mathscr{A}(kv + w)\|^2 = \|kv + w\|^2 - \|kv\|^2$

$$= 2\langle kv, w\rangle + \|w\|^2 \geq 0 \quad , \forall k \in \mathbb{R}$$

但取 $k = \dfrac{\|w\|^2}{2\langle v, w\rangle}$ 时, 上式为 0, 矛盾!

故 $\mathscr{A} = P_{\mathrm{Im}\mathscr{A}}$

ii) $\Rightarrow$ i) $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$ 显然, $\forall\, v \in V$, $\exists\, u \in U$, $w = U^\perp$ s.t. $v = u + w$.

此时, $\|\mathscr{A} v\| = \|u + \mathscr{A} w\| = \|u\| \leq \|v\|$

思考题 8.4. 与实内积空间的情况略有不同的是, 毕达哥拉斯定理的逆定理在酉空间的情况不成立. 即, 在酉空间中可能存在两个向量 u, v 满足 $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ 但 u 和 v 不正交.

请举出这样的具体例子. ■

$V = \mathbb{C}$, $u = 1$, $v = i$, $\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 = \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle = 2\mathrm{Re}\langle u, v\rangle = 0$. 但 $\langle u, v\rangle = i$

习题 8.1.1. 在 $V=\mathbb{C}[X]_{\leq 2}$ 上取定 Hermite 内积

$$\langle f\,,\,g\rangle := \sum_{k=0}^{2}\overline{f(k)}g(k)\,.$$

求此酉空间 $(V,\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ 的一组规范正交基.

先取一组基 $\{1, X, X^2\}$.

$\langle 1,1\rangle=3$, $\langle 1,X\rangle=3$ $\langle 1,X^2\rangle=5$

$\langle X,1\rangle=3$ $\langle X,X\rangle=5$ $\langle X,X^2\rangle\ 9$

$\langle X^2,1\rangle=5$ $\langle X^2,X\rangle=9$ $\langle X^2,X^2\rangle=17$

$g_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $g_2'=X-\langle g_1,X\rangle g_1=X-1$, $g_2=\frac{g_2'}{\sqrt{\langle g_2',g_2'\rangle}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)$

$g_3'=X^2-\langle g_1,X^2\rangle g_1-\langle g_2,X^2\rangle g_2$

$=X^2-\frac{5}{3}-2(X-1)=X^2-2X+\frac{1}{3}$

$g_3=g_3'/\sqrt{\langle g_3',g_3'\rangle}=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(X^2-2X+\frac{1}{3}\right)$

高代习题课—Hw14

甘 2025.6.1.

习题 8.1.3. 设 $V = \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

1. 证明: 映射
$$V \times V \longrightarrow \mathbb{C}\,; \quad (A,\, B) \longmapsto \langle\, A,\, B\,\rangle := \mathrm{Tr}\left(\overline{A}^T B\right)$$
是 V 上的 Hermite 内积.

2. 设 U 是 V 中的对角矩阵构成的子空间. 求 U 关于以上 Hermite 内积的正交补 $U^{\perp}$.

证: 1. 半线性: $\langle aA+bB, C\rangle = \mathrm{Tr}((\overline{aA+bB})^T C) = \bar{a}\mathrm{Tr}(\bar{A}^T C)+\bar{b}\mathrm{Tr}(\bar{B}^T C) = \bar{a}\langle A,C\rangle+\bar{b}\langle B,C\rangle$

$\langle A, bB+cC\rangle = \mathrm{Tr}(\bar{A}^T(bB+cC)) = b\mathrm{Tr}(\bar{A}^T B)+c\,\mathrm{Tr}(\bar{A}^T C) = b\langle A,B\rangle+c\langle A,C\rangle$

共轭对称: $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}(\bar{A}^T B) = \mathrm{Tr}(B^T \bar{A}) = \overline{\mathrm{Tr}(\bar{B}^T A)} = \langle B,A\rangle$

正定: $\langle A,A\rangle = \mathrm{Tr}(\bar{A}^T A) = \sum|a_{ii}|^2 \geq 0$ 当且仅当 $A=0$ 时取"=".

2. 设 $D=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$, $d_i\in\mathbb{C}$. $A=(a_{ij})$

$\langle D,A\rangle = \mathrm{Tr}(\bar{D}^T A) = \sum_{i=1}^{n}\bar{d_i}\,a_{ii} = 0$ 对任意 $d_i\in\mathbb{C}$ 均成立.

$\Rightarrow a_{ii}=0$, $\forall i$

$\Rightarrow U^{\perp} = \{A\in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}): A_{ii}=0\ \forall i\}$

习题 8.1.4. 设 V 是 n 维复向量空间. 设 $\sigma: V\to V$ 是满足以下条件的一个映射 (称为一个**共轭映射**):

- 对任意 $u, v\in V$, $\sigma(u+v)=\sigma(u)+\sigma(v)$.
- 对任意 $c\in\mathbb{C}$, $v\in V$, $\sigma(cv)=\bar{c}\,\sigma(v)$.
- $\sigma^2 = I$.

令 $R_\sigma(V) := \{v\in V \mid \sigma(v)=v\}$. 证明:

1. $R_\sigma(V)$ 是 n 维实向量空间.
2. 每个 $v\in V$ 可以唯一地表示为 $v=u+\mathrm{i}w$, 其中 $u, w\in R_\sigma(V)$.
3. 假设 $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ 是 $R_\sigma(V)$ 上的一个内积. 则以下映射
$$\begin{aligned}\langle\cdot\,,\cdot\rangle' :\quad & V\times V\longrightarrow V;\\ & \langle v_1\,,v_2\rangle' := \langle u_1,\,u_2\rangle + \langle w_1,\,w_2\rangle + \mathrm{i}\big(\langle u_1\,,w_2\rangle - \langle u_2\,,w_1\rangle\big)\end{aligned}$$
是 V 上的 Hermite 内积, 其中 $v_1=u_1+\mathrm{i}w_1$ 和 $v_2=u_2+\mathrm{i}w_2$ 是上面所说的唯一分解式 (即, $u_1, u_2, w_1, w_2\in R_\sigma(V)$).

证: 易证 $R_\sigma(V)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间

设 V 的一组基为 $v_1,\cdots,v_n$.

$\mathbb{R}$-线性无关向量组

$\{\sigma v_i+v_i : i=1,\cdots,n\}\subseteq R_\sigma(V)$

$\{i(\sigma v_i+v_i): i=1,\cdots,n\}\subseteq R_\sigma^-(V)$

$:= \{v\in V \mid \sigma(v)+v=0\}$

由 $\sigma^2-I=0$ 可得 $V=R_\sigma(V)\oplus R_\sigma^-(V)$

(作为 $\mathbb{R}$-线性映射)

2. 由构造即得

3. 半线性: ✓

共轭对称: ✓

正定: ✓

习题 8.1.5. 设 V 为实内积空间或酉空间, U, W 是 V 的有限维子空间. 证明 U 和 W 正交的充分必要条件是 $P_U P_W = 0$.

证: U与W正交 $\Longleftrightarrow \forall (u,w) \in U \times W$, $\langle u, w \rangle = 0$

"$\Rightarrow$" $P_U P_W(v) = P_U(w) = 0$ 其中 $w' = P_W(u) \in W$

"$\Leftarrow$" $\forall w \in W$, $P_U P_W(w) = P_U(w) = 0 \Rightarrow \forall u \in U, \langle u, w \rangle = 0$

习题 8.1.7. 设 V 是实内积空间或酉空间, $W \subseteq V$ 是有限维子空间, $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 满足 $\langle \mathscr{A}u, \mathscr{A}v \rangle = \langle u, v \rangle$ 对所有 $u, v \in V$ 成立.

则当 W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间时, $W^\perp$ 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. (提示: $\mathscr{A}|_W : W \to W$ 是满射.)

证: $\forall u \in W^\perp$, $w \in W$. $\langle \mathscr{A}w, \mathscr{A}w \rangle = \langle w, w \rangle \geq 0 \Rightarrow \mathscr{A}|_W$ 满

假设 $w' \in W$ 为 $\mathscr{A}w' = w$, 则

$\langle \mathscr{A}u, w \rangle = \langle u, w' \rangle = 0$. $\Rightarrow$ $W^\perp$ 是 $\mathscr{A}$-不变的.

思考题 8.8. 证明: 对于酉空间 V 中的任意向量 u, w 和任意线性变换 $T \in \mathrm{End}(V)$, 以下恒等式成立:

$$\begin{aligned} 4\langle Tu, w \rangle = \langle T(u+w), u+w \rangle - \langle T(u-w), u-w \rangle \\ - \mathrm{i}\langle T(u+\mathrm{i}w), u+\mathrm{i}w \rangle + \mathrm{i}\langle T(u-\mathrm{i}w), u-\mathrm{i}w \rangle. \end{aligned}$$

再利用以上恒等式给出引理 8.2.4 的另一个证明. ∎

证: 展开式右边即可.

由 8.2.4 的条件, RHS $\equiv 0$, 故 $\langle Tu, w \rangle = 0$ 对于任意 $v, w \in V$.

特别地, 取 $w = T(u)$, 可得 $Tu = 0$.

思考题 8.10. 设 $\mathscr{A}$ 是 (有限维酉空间) V 上的正规变换, $U \subseteq V$ 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

1. 证明引理 7.2.30 在酉空间的情况也成立. 即,
   (a) $U^\perp$ 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, U 也是 $\mathscr{A}^*$ 的不变子空间.
   (b) $(\mathscr{A}|_U)^* = (\mathscr{A}^*)|_U$.
   (c) $\mathscr{A}|_U \in \mathrm{End}(U)$ 和 $\mathscr{A}|_{U^\perp} \in \mathrm{End}(U^\perp)$ 也都是正规变换.
2. 由此再给出定理 8.2.8 的另一个证明.

证: 1. a) 与欧氏空间的讨论类似.

b) $\langle \mathscr{A}|_U(u), u' \rangle = \langle u, \mathscr{A}^*(u') \rangle = \langle u, \mathscr{A}^*|_U(u') \rangle$, $\forall u, u' \in U$

c) $\mathscr{A}|_U (\mathscr{A}|_U)^* = \mathscr{A}|_U \mathscr{A}^*|_U = (\mathscr{A}\mathscr{A}^*)|_U = (\mathscr{A}^*\mathscr{A})|_U = \mathscr{A}^*|_U \cdot \mathscr{A}|_U$

$\mathscr{A}|_{U^\perp}$ 类似

2. i)⇒ii) 取 u_1' 为 $\mathcal{A}$ 的一个特征向量. 则 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{u_1'\} =: U_1$ 是 $\mathcal{A}$ 不变子空间

由1. U_1 为 $\mathcal{A}^*$ 不变, $U_1^\perp$ 为 $\mathcal{A}$ 不变子空间.

再在 $U_1^\perp$ 中取一个特征向量 u_2', 则 $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{u_2'\} =: U_2 \subseteq U_1^\perp$ 是 $\mathcal{A}$ 不变的、

...

依次选取 $u_1', \cdots, u_n'$. 规范化之后得 $u_1, \cdots, u_n$ 为一组规范正交基

且满足题意.

ii)⇒iii) ✓

iii)⇒i) 在规范正交基 ε 下, $M_\varepsilon(\mathcal{A}^*) = \overline{M_\varepsilon(\mathcal{A})}^T$

习题 8.2.2. 将一个复方阵 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ 写成 $A = P + \mathrm{i}Q$, 其中 $P, Q \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. 证明: A 是酉矩阵当且仅当 P^TQ 是对称阵且 $P^TP + Q^TQ = I_n$.

证: A 是酉阵 $\Leftrightarrow \bar{A}^TA = I_n \Leftrightarrow P^TP + Q^TQ + i(P^TQ - Q^TP) = I_n$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P^TP + Q^TQ = I_n \\ P^TQ = Q^TP = (P^TQ)^T \end{cases}$$

习题 8.2.4. 证明任意一个二阶酉矩阵 U 可以分解为

$$U = \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{\mathrm{i}\theta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\theta_3} & 0 \\ 0 & e^{\mathrm{i}\theta_4} \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } \theta, \theta_i \in \mathbb{R}.$$

设 $U = (u_{ij})$, $u_{ij} \in \mathbb{C}$, $i,j \in \{1,2\}$. 则

$$U^*U = \begin{pmatrix} |u_{11}|^2 + |u_{21}|^2 & \overline{u_{11}}u_{12} + \overline{u_{21}}u_{22} \\ \overline{u_{12}}u_{11} + \overline{u_{22}}u_{21} & |u_{12}|^2 + |u_{22}|^2 \end{pmatrix} = I_2$$

令 $u_{11} = e^{i\alpha} \cdot \cos\theta$, $u_{21} = e^{i\beta} \cdot \sin\theta$ $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$

$u_{12} = e^{i\gamma} \cos\xi$, $u_{22} = e^{i\omega} \cdot \sin\xi$, $\gamma, \omega, \xi \in \mathbb{R}$

则 $\overline{u_{11}}u_{12} + \overline{u_{21}}u_{22} = e^{i(\gamma-\alpha)}\cos\xi\cos\theta + e^{i(\omega-\beta)}\sin\xi\sin\theta = 0$.

$\Rightarrow (\gamma-\alpha) - (\omega-\beta) \in k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 且 $\cos(\xi+\theta) = 0$ 或 $\cos(\xi-\theta) = 0$.

不妨令 $\xi - \theta = \frac{\pi}{2}$, 则 $u_{12} = -e^{i\gamma}\sin\theta$, $u_{22} = e^{i\omega}\cos\theta$

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos\theta & -e^{i\gamma}\sin\theta \\ e^{i\beta}\sin\theta & e^{i\omega}\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & \\ & e^{i\theta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta_3} & \\ & e^{i\theta_4} \end{pmatrix}$$

用待定系数法可解得 θ_i.

思考题 8.11. 设 V 是有限维酉空间, $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$. 证明下列条件等价:

(i) $\mathscr{A}$ 是自伴算子 (亦即 Hermite 变换).

(ii) 对任意 $v \in V$, $\langle \mathscr{A}v\,, v\rangle$ 是实数.

证: $\mathscr{A} = \mathscr{A}^* \Leftrightarrow \langle \mathscr{A}v, w\rangle = \langle v, \mathscr{A}w\rangle \quad \forall v, w \in V$

i)⇒ii): 令 $v = w$, 则 $\langle \mathscr{A}v, v\rangle = \overline{\langle \mathscr{A}v, v\rangle} \Rightarrow \langle \mathscr{A}v, v\rangle \in \mathbb{R}$

ii)⇒i): $\forall v, w \in V$

$\langle \mathscr{A}(v+w), v+w\rangle - \langle \mathscr{A}(v-w), v-w\rangle = 2(\langle \mathscr{A}v, w\rangle + \langle \mathscr{A}w, v\rangle) \in \mathbb{R}$

$\langle \mathscr{A}(v+iw), v+iw\rangle - \langle \mathscr{A}(v-iw), v-iw\rangle$

$= 2\langle \mathscr{A}v, iw\rangle + 2\langle i\mathscr{A}(w), v\rangle = 2i\left(\langle \mathscr{A}v, w\rangle - \langle \mathscr{A}(w), v\rangle\right) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \langle \mathscr{A}v, w\rangle = \overline{\langle \mathscr{A}w, v\rangle} = \langle v, \mathscr{A}w\rangle$

思考题 8.15. 设 V, W 均为非零的有限维实内积空间或酉空间, $\mathscr{A} \in \mathrm{Hom}(V, W)$. 证明: $\mathrm{rank}(\mathscr{A}) = \mathrm{rank}(\mathscr{A}\mathscr{A}^*) = \mathrm{rank}(\mathscr{A}^*\mathscr{A})$.

(因此, 只要 $\mathscr{A} \neq 0$, 线性变换 $\mathscr{A}^*\mathscr{A}$ 一定有非零的特征值, 从而 $\mathscr{A}$ 一定有奇异值.) ■

证: 显然 $\ker \mathscr{A} \subset \ker \mathscr{A}^*\mathscr{A}$. 另一方面. $\forall v \in \ker \mathscr{A}^*\mathscr{A}$,

$\langle \mathscr{A}v, \mathscr{A}v\rangle = \langle \mathscr{A}^*\mathscr{A}v, v\rangle = 0 \Rightarrow v \in \ker \mathscr{A}$.

故 $\ker \mathscr{A} = \ker \mathscr{A}^*\mathscr{A}$.

由秩零化度定理得: $\mathrm{rank}\, \mathscr{A} = \mathrm{rank}\, \mathscr{A}^*\mathscr{A}$.

且 $\mathrm{rank}\, \mathscr{A} = \mathrm{rank}\, \mathscr{A}^T = \mathrm{rank}\, \overline{\mathscr{A}}\mathscr{A}^T = \mathrm{rank}\, \mathscr{A}\mathscr{A}^*$

高代II - Hw 15

甘 2025.6.7

习题 8.2.5. 证明 Schur 不等式: 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是复方阵 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ (在重数计入意义下) 的所有特征值. 则
$$\operatorname{Tr}(A\overline{A}^T) \geq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2,$$
并且等号成立的充分必要条件是 A 为正规矩阵. (提示: 使用 Schur 定理.)

证: 设 U 为酉方阵 st. $A = U^{-1}QU$, 其中 Q 为上三角.

$\operatorname{Tr}(AA^*) = \operatorname{Tr}(U^{-1}QUU^*Q^*U) = \operatorname{Tr}(U^{-1}QQ^*U) = \operatorname{Tr}(QQ^*UU^{-1})$

$= \operatorname{Tr}(QQ^*) = \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i\|^2 \geq \sum |\lambda_i|^2$, 其中 α_i 为 Q 的第 i 列. λ_i 为对角元.

取 "=" iff $\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. 即 A 为正规阵.

习题 8.3.1. 设 U 是 V 的子空间. 证明正交投影 $P_U \in \operatorname{End}(V)$ 是半正定算子.

证: 设 $v = u_1 + u_2$, 其中 $u_1 \in U$, $u_2 \in U^\perp$

$\langle P_U(v), v \rangle = \langle u_1, u_1 \rangle + \langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_1 \rangle \geq 0$

且 $\forall v \in U^\perp$, $\langle P_U(v), v \rangle = 0$.

故若 $U \neq V$, P_U 为半正定算子.

习题 8.3.2. 设 V 是有限维西空间, $\mathscr{A} \in \operatorname{End}(V)$ 是正规变换. 证明 $\mathscr{A}$ 必有平方根, 即, 存在 $\mathscr{B} \in \operatorname{End}(V)$ 使得 $\mathscr{A} = \mathscr{B}^2$.

证: 由谱定理, $\exists$ 一组规范正交基 $\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_n\}$, e_i 均为特征向量.

令 $\mathscr{A}e_i = \lambda_i e_i$. 考虑映射 $\mathscr{B}: e_i \mapsto \lambda_i^{\frac{1}{2}} e_i$. $\lambda_i^{\frac{1}{2}}$ 取任一 λ_i 的平方根均可.

则 $\mathscr{B}^2 = \mathscr{A}$.

习题 8.3.4. 设 W 是有限维复向量空间, $\mathscr{A} \in \operatorname{End}(W)$ 是可逆线性变换. 证明 $\mathscr{A}$ 必有平方根. (提示: 利用 Jordan 标准形或 Jordan–Chevalley 分解.)

证: 令 $D_k = \sum_{i=1}^{n-k} E_{i,i+k}$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$. 注意到 $D_i \cdot D_j = D_{i+j}$, ($i \geq n$ 时, $D_i = 0$)

考虑方程 $(a_0 D_0 + a_1 D_1 + \cdots + a_{n-1} D_{n-1})^2 = \lambda D_0 + D_1 = J_n(\lambda)$, $\lambda \neq 0$.

则有 $a_0^2 = \lambda$, $a_0 a_1 + a_1 a_0 = 1$, $a_0 a_2 + a_1^2 + a_2 a_0 = 0$, $\cdots$, $a_0 a_{n-1} + \cdots + a_{n-1} a_0 = 0$

即 $a_0^2=\lambda,\ 2a_0a_1=1,\ \forall\, 2\le i\le n-1,\ \sum_{j=0}^{i} a_j a_{i-j}=0$.

共 n个方程，n个未知量，且 $a_0\neq 0$. 故一定有解.

故Jordan块必有平方根. 因此，$\mathscr{A}$一定有平方根.

习题 8.3.5. 证明或举出反例: 设 V 是有限维酉空间或实内积空间, $\mathscr{A}\in\mathrm{End}(V)$ 是自伴算子, $(e_1,\cdots,e_n)$ 是 V 的一组规范正交基. 如果对每个 $i\in[\![1,n]\!]$ 均有 $\langle\mathscr{A}e_i,\, e_i\rangle$ 为非负实数, 那么 $\mathscr{A}$ 是半正定算子.

证：考虑 $V=\mathbb{R}^3$ (或 $\mathbb{C}^3$)，在 $\mathcal{E}=(e_1,\cdots,e_3)$ 下，$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})=\begin{pmatrix}1&&2\\&1&\\2&&1\end{pmatrix}$

令 $v=e_1-2e_3$，$\mathscr{A}v=-3e_1$. $\langle\mathscr{A}v,v\rangle=-3\langle e_1,e_1-2e_3\rangle=-3<0$

故题目命题非真.

习题 8.3.6. 取定非零向量 $u,\, x\in V$. 定义线性变换

$$\mathscr{A}: V\longrightarrow V;\quad v\longmapsto \mathscr{A}v:=\langle u,\, v\rangle x\,.$$

求 $\sqrt{\mathscr{A}^*\mathscr{A}}$ 的表达式.

$\langle\mathscr{A}^*(v),w\rangle=\langle v,\mathscr{A}w\rangle=\langle u,w\rangle\langle v,x\rangle=\langle\overline{\langle v,x\rangle}u,w\rangle$

由伴随的唯一性，$\mathscr{A}^*: v\mapsto\overline{\langle v,x\rangle}u$.

$\mathscr{A}^*\mathscr{A}: v\longmapsto\langle u,v\rangle\overline{\langle x,x\rangle}u$

令 $\mathscr{B}: v\mapsto\sqrt{\frac{\overline{\langle x,x\rangle}}{\langle u,u\rangle}}\langle u,v\rangle u$，则 $\forall v\in V$.

$$\mathscr{B}^2(v)=\sqrt{\frac{\overline{\langle x,x\rangle}}{\langle u,u\rangle}}\cdot\left\langle u,\sqrt{\frac{\overline{\langle x,x\rangle}}{\langle u,u\rangle}}\langle u,v\rangle u\right\rangle u$$

$$=\frac{\overline{\langle x,x\rangle}}{\langle u,u\rangle}\cdot\langle u,u\rangle\langle u,v\rangle u=\overline{\langle x,x\rangle}\langle u,v\rangle u=\mathscr{A}^*\mathscr{A}(v)$$

习题 8.3.7. 定义 $\mathscr{A}\in\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ 为 $(x,\,y,\,z)^T\longmapsto(z,\,2x,\,3y)^T$. 找出一个等距同构 $Q\in\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ 使得 $\mathscr{A}=Q\sqrt{\mathscr{A}^*\mathscr{A}}$.

$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&0&0\\0&3&0\end{pmatrix}$，$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}^*)=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&3\\1&0&0\end{pmatrix}$. $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}^*\mathscr{A})=\begin{pmatrix}4&&\\&9&\\&&1\end{pmatrix}$

令 $f_1=\frac{1}{2}\mathscr{A}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$f_2=\frac{1}{3}\mathscr{A}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$f_3=\mathscr{A}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})=\begin{pmatrix}&&1\\1&&\\&1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&1\end{pmatrix}$ $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Q)=\begin{pmatrix}&&1\\1&&\\&1&\end{pmatrix}$

习题 8.3.8. 设 $\mathscr{A} \in \operatorname{End}(V)$.

1. 证明: 若 $\mathscr{A}$ 是可逆变换, 则在极分解式 $\mathscr{A} = QS = S_1Q_1$ 中, 等距同构 Q 和 Q_1 也是由 $\mathscr{A}$ 唯一确定的.
2. 举例说明: 若 $\mathscr{A}$ 不可逆, 则极分解式 $\mathscr{A} = QS$ 中的等距同构 Q 可能不是唯一的 (S 为半正定算子).

证: 1. $\operatorname{rank} \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \operatorname{rank} \mathscr{A} \leq \operatorname{rank} \sqrt{A^*A} \Rightarrow S_1, S$ 也可逆.

故 $Q = \mathscr{A}S^{-1}$, $Q_1 = S_1^{-1}\mathscr{A}$.

2. $$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

习题 8.3.11. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的所有奇异值, 并找出正交矩阵 Q_1, Q_2 使 Q_1AQ_2 成为 A 的正交相抵标准形.

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A^*A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$$

$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T$ 满足 $A^*A\xi_1 = \xi_1$

$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$ 满足 $A^*A\xi_2 = 3\xi_2$

$\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$ 满足 $A^*A\xi_3 = 0$

$\eta_1 = 1 \cdot A\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\eta_2 = \sqrt{3}^{-1} A\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Q_1 = (\eta_1, \eta_2)$, $Q_2 = (\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)$

习题 8.3.12. 找出一个 $\mathscr{A} \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^2)$ 使得 0 是 $\mathscr{A}$ 的唯一特征值, 而 5 是 $\mathscr{A}$ 的唯一奇异值.

取 $\mathbb{C}^2$ 中的标准基 $\varepsilon = (e_1, e_2)$. 令 $\mathcal{M}_\varepsilon(\mathscr{A}) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\mathcal{M}_\varepsilon(\mathscr{A}^*) = \begin{pmatrix} 0 & \\ \bar{a} & 0 \end{pmatrix}$

则 $\mathcal{M}_\varepsilon(\mathscr{A}^*\mathscr{A}) = \begin{pmatrix} |a|^2 & \\ & |a|^2 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = 5$

$\mathcal{M}_\varepsilon(\mathscr{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ & 0 \end{pmatrix}$

习题 8.3.15. 设 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$. 证明或举出反例: $\mathscr{A}^2$ 的奇异值一定是 $\mathscr{A}$ 的某个奇异值的平方.

$V = \mathbb{C}^3$, ε 标准基

$\mathcal{M}_\varepsilon(\mathscr{A}) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 3 \\ & & \end{pmatrix}$, $\mathcal{M}_\varepsilon(\mathscr{A}^*\mathscr{A}) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$

$\mathcal{M}_\varepsilon(\mathscr{A}^2) = \begin{pmatrix} & & 3 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$, $\mathcal{M}_\varepsilon(\mathscr{A}^{2*}\mathscr{A}^2) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$